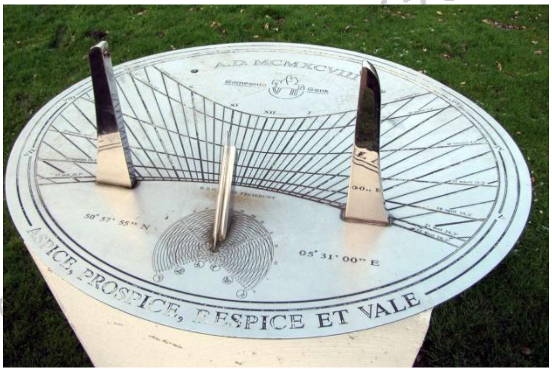
ZONNEWIJZERS

Hoofdstuk 9A De Bifilaire Zonnewijzer met een ketting.

Inleiding.

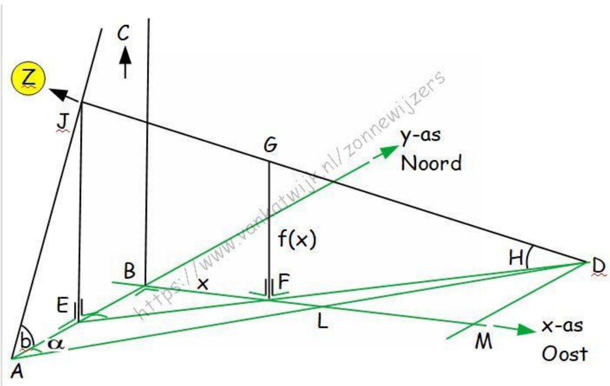
Op internet zag ik een bijzondere variant van de bifilaire zonnewijzer. Deze zonnewijzer die in het “Genk Sundial Park” staat heeft Noord-Zuid een poolstijl en



Oost-West een ketting. Op de rechterfoto ontbreekt helaas de ketting, maar die foto geeft wel een goed beeld van de uur- en datumlijnen. De datumlijnen zijn afhankelijk van de vorm van de ketting (kromming) en de hoogte van het laagste punt van de ketting.

Constructie

De tijdlijnen worden op dezelfde manier gevonden als bij de “gewone” horizontale zonnewijzer. Dit zijn lijnen die vanuit de voet van de poolstijl een hoek alfa ten opzichte van de Noord-Zuid lijn maken. Bij de horizontale zonnewijzer is gevonden:
tan(alfa) = sin(b)*tan(P) met b de geografische breedte en P de uurhoek bij deze tijd.



In de figuur liggen de groene lijnen in het grondvlak. De poolstijl is AJ of AC. De gnomon is BC. De afstand AB wordt bekend verondersteld zodat met bekende breedte b driehoek ABC vast ligt. De niet getekende kettinglijn valt in het Oost-West vlak, het vlak MBC.
Op een zekere datum en tijd valt de lichtstraal van de zon (Z) langs punt J van de poolstijl en punt G van de ketting zodanig dat de datumlijn (schaduw van de ketting) en de tijdlijn AL elkaar snijden in punt D. In de figuur is de situatie ’s middags getekend, de zon staat in westelijke richting, voor de uurhoek geldt: $0° \le P < 180°$.
Als formules voor de coördinaten van de punten D en F gevonden kunnen worden, dan zijn daarmee de datumlijnen te tekenen.

Op een bepaalde plaats, datum en tijd zijn de volgende variabelen bekend: geografische breedte (b), declinatie (d) en (plaatselijke) uurhoek (P). Hiermee zijn hoek DAB (alfa), hoek EDJ (hoogte van de zon H) en de ware peiling (WP) van de zon te berekenen. De richting van de zon is richting DFE. Hoek BEF is daarom WP-180°.

De volgende formules zijn terug te vinden in hoofdstuk 1, Astronomische basiskennis.

sin(H) = sin(b)*sin(d) + cos(b)*cos(d)*cos(P)

cos(T)= $\frac{\sin(\mathrm{d})-\sin(\mathrm{b})*\sin(\mathrm{H})}{\cos(\mathrm{b})*\cos(\mathrm{H})}$ dit geeft met 0<=T<180° , WP = 360°-T (0°<=P<180°)

tan(alfa) = sin(b)*tan(P)

Uit de figuur op bladzijde 1 volgt:

$\tan(\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{DF}}$ zodat $\mathrm{DF} = \frac{\mathrm{FG}}{\tan(\mathrm{H})}$ (1)

$\sin(\mathrm{BEF}) = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{EF}}$ zodat $\mathrm{EF} = \frac{\mathrm{BF}}{\sin(\mathrm{BEF})}$ (2)

Uit (1) en (2): $\mathrm{DE} = \mathrm{DF} + \mathrm{EF} = \frac{\mathrm{FG}}{\tan(\mathrm{H})} + \frac{\mathrm{BF}}{\sin(\mathrm{BEF})}$ (3)

$\tan(\mathrm{b}) = \frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{AB}-\mathrm{BE}}$ zodat EJ = (AB - BE)*tan(b) (4)

$\tan(\mathrm{BEF}) = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BE}}$ zodat $\mathrm{BE} = \frac{\mathrm{BF}}{\tan(\mathrm{BEF})}$ (5)

Uit (4) en (5): $\mathrm{EJ} = \{\mathrm{AB} - \frac{\mathrm{BF}}{\tan(\mathrm{BEF})}\}$*tan(b) $= \mathrm{AB} * \tan(\mathrm{b}) - \frac{\mathrm{BF}*\tan(\mathrm{b})}{\tan(\mathrm{BEF})}$ (6)

$\tan(\mathrm{H}) = \frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{DE}}$ zodat EJ =DE*tan(H) (7)

Uit (3) en (7): $\mathrm{EJ} = \{\frac{\mathrm{FG}}{\tan(\mathrm{H})} + \frac{\mathrm{BF}}{\sin(\mathrm{BEF})}\}$*tan(H) = $\mathrm{FG} + \frac{\mathrm{BF}*\tan(\mathrm{H})}{\sin(\mathrm{BEF})}$ (8)

Uit (6) en (8): $\mathrm{EJ} = \mathrm{FG} + \frac{\mathrm{BF}*\tan(\mathrm{H})}{\sin(\mathrm{BEF})} = \mathrm{AB} * \tan(\mathrm{b}) - \frac{\mathrm{BF}*\tan(\mathrm{b})}{\tan(\mathrm{BEF})}$

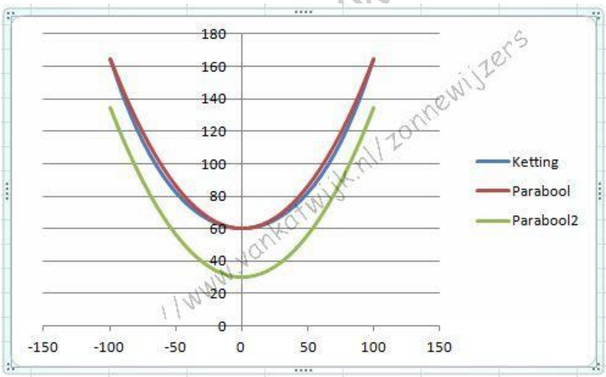
of, met BF = x, FG = f(x) en hoek BEF = WP-180°

$$\mathbf{f(x)} + \frac{\mathbf{x*tan\ (H)}}{\mathbf{sin}\ (\mathrm{WP}-180°)} + \frac{\mathbf{x*tan\ (b)}}{\mathbf{tan}\ (\mathrm{WP}-180°)} - \mathbf{AB * tan(b) = 0} \qquad (9)$$

Voor een kettinglijn geldt: $f(x) = \frac{a}{2} * (e^{x/a} + e^{-x/a})$

Met een bekende a ingevuld in vergelijking 9 lijkt dit analytisch niet op te lossen (!?)

In het volgende wordt daarom gekozen voor een kwadratische vergelijking (parabool) die zo goed mogelijk op een kettinglijn aansluit.



De ketting met vergelijking (a = 60)

$$f(x) = \frac{60}{2}(e^{x/60} + e^{-x/60})$$

en de parabool met vergelijking $y = 0{,}01045\ x^2 + 60$ vallen op het interval $-100 < x < 100$ nagenoeg samen.

De parabool $y = 0{,}01045\ x^2 + 30$ is alleen 30 eenheden gezakt ten opzichte van de eerstgenoemde parabool, maar heeft overigens dezelfde vorm.

ZONNEWIJZERS

Met deze parabool ($y = 0{,}01045\,x^2 + 30$) wordt vergelijking 9:

$$0{,}01045\,x^2 + 30 + \frac{x * \tan(H)}{\sin(WP-180°)} + \frac{x * \tan(b)}{\tan(WP-180°)} - AB * \tan(b) = 0$$

$$\mathbf{0{,}01045\,x^2 + \left\{\frac{\tan(H)}{\sin(WP-180°)} + \frac{\tan(b)}{\tan(WP-180°)}\right\} * x + 30 - AB * \tan(b) = 0}$$

Dit is een vierkantsvergelijking van de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ met
a = $0{,}01045$, b = $\left\{\frac{\tan(H)}{\sin(WP-180°)} + \frac{\tan(b)}{\tan(WP-180°)}\right\}$, c = $30 - AB * \tan(b)$

Hiermee is x, dus de afstand BF eenvoudig te berekenen.
Als nu ook de coördinaten van punt D te berekenen zijn dan zijn daarmee de datumlijnen te tekenen.

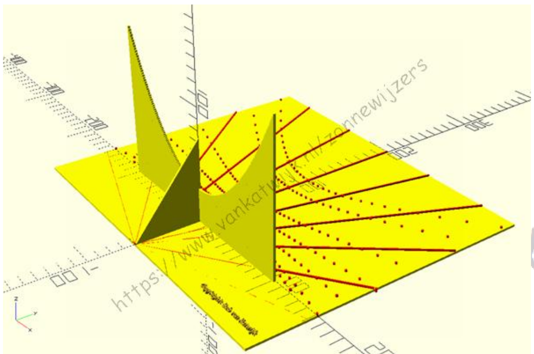
Hoek FDM = Hoek BEF
$\cos(FDM) = \frac{DM}{DF}$ zodat DM = y_D =DF * cos(BEF)
Formule (1) was: $DF = \frac{FG}{\tan(H)}$ zodat $\boxed{y_D = \frac{\mathbf{FG * \cos(BEF)}}{\mathbf{\tan(H)}} = \frac{\mathbf{f(x) * \cos(BEF)}}{\mathbf{\tan(H)}}}$

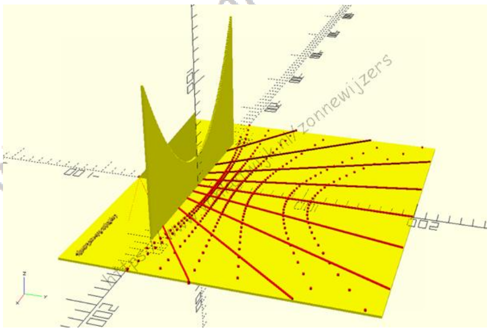
$\sin(FDM) = \frac{MF}{DF}$ zodat MF =DF * sin(BEF), weer met formule (1) geeft dit:

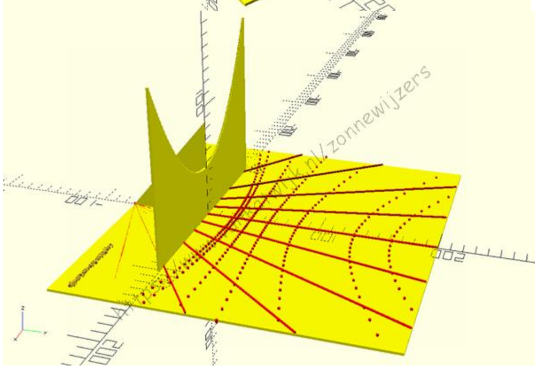
$$MF = \frac{\mathbf{FG * \sin(BEF)}}{\mathbf{\tan(H)}} = \frac{\mathbf{f(x) * \sin(BEF)}}{\mathbf{\tan(H)}} =$$

$$\boxed{\mathbf{x_D = BM = BF + MF = x + \frac{f(x) * \sin(BEF)}{\tan(H)}}}$$

Met AB = 60 en de boven gevonden formules ziet deze zonnewijzer met getekende tijd- en datumlijnen er als volgt uit. De stippen op de maandlijnen zijn om de tien tijdminuten.







De maandlijnen in de bovenstaande twee figuren lijken nog het meest op de lijnen van de zonnewijzer in Genk.
Met AB = 70 en een hoogte van het laagste punt van de "ketting" van 45 eenheden veranderen de datumlijnen als in de tekening links.