

ZONNEWIJZERS

Hoofdstuk 6 Een uniforme methode voor de berekening van het schaduwpunt bij vlakke zonnewijzers.

Inhoud:

Aanleiding	blz. 6.1
Coördinaten in R3 van de aardse projectie van de zon	blz. 6.2
Rotaties in R3	blz. 6.2
Rotatie om de x-as over een hoek $-(90 - b)$	blz. 6.2
Tussenstap: formules voor de hoogte en het azimut van de zon	blz. 6.3
Willekeurige stand van het zonnewijzervlak (draaiing d en inclinatie i)	blz. 6.4
Samenvatting	blz. 6.5
Coördinaten van het voetpunt van de poolstijl en de x-y-richting	blz. 6.6
Het juiste kwadrant van hoek k tussen de Noordrichting en de substijl	blz. 6.7
Het juiste kwadrant van de uurhoek van de substijl P_{SS}	blz. 6.7

Aanleiding

Op internet vond ik onderstaand pdf bestand:

<https://www.dezonnewijzerkring.nl/media/algemeen/FdV-vlakke-zws-berekenen.pdf>

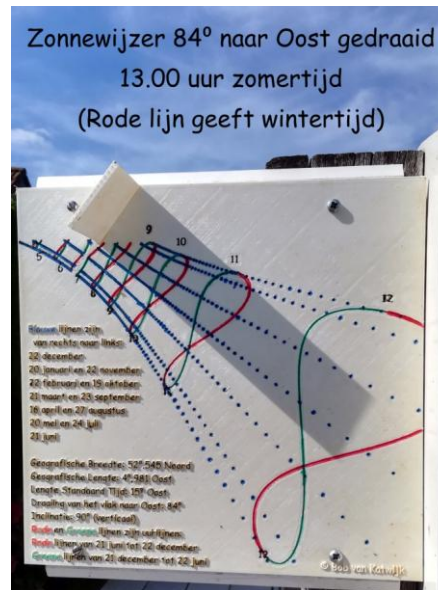
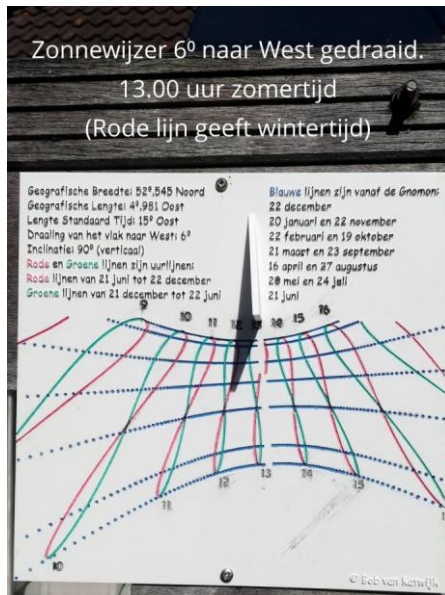
later gewijzigd in:

<https://www.dezonnewijzerkring.nl/algemeen/FdV-vlakke-zws-berekenen.pdf>

van dhr. Fer J. de Vries die helaas overleden is. Graag had ik met hem contact gehad. Kennelijk is er een tijd geweest waarin (bestuurs-)leden van de Zonnewijzerkring wel geïnteresseerd waren in de achtergronden en bijbehorende formules van zonnewijzers. Het bijzondere is dat ik in 1981 een stukje gepubliceerd heb met de titel "A Different View of the Star Fix" ook gebaseerd op 3D coördinaten aan de hemelsfeer. Zie <https://www.vankatwijk.nl/Starfix.pdf>

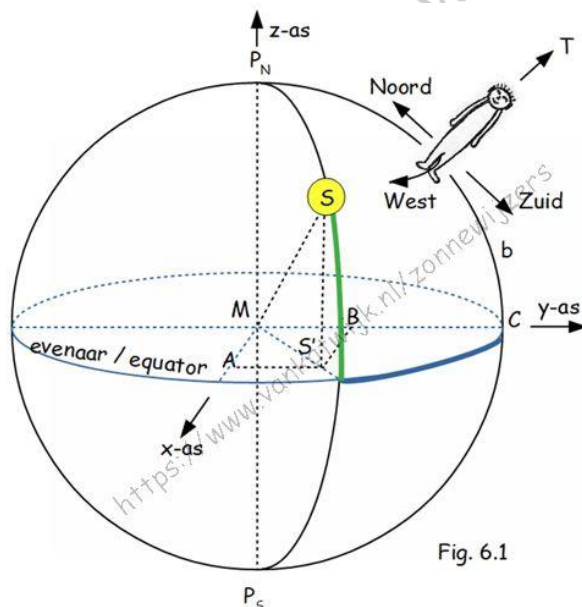
In onderstaande staat een uitleg van de gebruikte formules in de Hoofd Procedure (blz. 5 van het bestand van dhr. de Vries). Het principe is gebaseerd op assen rotaties in R3.

ZONNEWIJZERS



Hiernaast staan twee voorbeelden van 3D geprinte verticale vlakke zonnewijzers (gefotografeerd op 14 september 2019) gebaseerd op de hieronder afgeleide formules

Coördinaten in R3 van de aardse projectie van de zon



De aarde is getekend als een bol met Straal = 1. M is het middelpunt van de aarde en de sfeer. Het poppetje is de plaats van de zonnewijzer / waarnemer met de bijbehorende windrichtingen. S is de aardse projectie van de zon, dat is het snijpunt van de lijn M-Zon met het aardoppervlak. S' is de projectie van S op het equatorvlak.

De blauwe boog (hoek CMS') is de plaatselijke westelijke uurhoek P (LHA).

De groene boog (hoek SMS') is de declinatie d. Kies een rechtsdraaiend assenstelsel x,y,z met de y-as als de snijlijn van het equatorvlak met het meridiaanvlak van de waarnemer en de z-as samenvallend met de aardas.

Om verwarring met de draaiing d in het horizontale vlak te voorkomen wordt de declinatie hier aangegeven met **decl**.

De coördinaten t.o.v. het equatorvlak worden gegeven door:

$$MS' = \cos(\text{decl}) \quad x_0 = MA = BS' = MS' * \sin(P)$$

$$y_0 = AS' = MB = MS' * \cos(P)$$

$$z_0 = \text{Sun-S'}$$

$$x_0 = \sin(P) * \cos(\text{decl})$$

$$y_0 = \cos(P) * \cos(\text{decl})$$

$$z_0 = \sin(\text{decl})$$

Rotaties in R3

Onderstaand worden de algemene formules (rotatie-matrices) voor assenrotaties in R3 (in de richting van de as met de klok mee) gegeven. ϕ is de hoek waarover het assenstelsel wordt gedraaid.

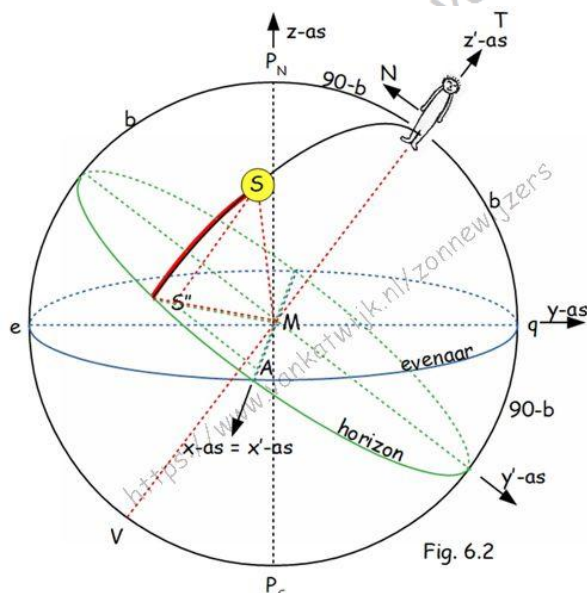
ZONNEWIJZERS

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotatie om de x-as over een hoek $-(90 - b)$

De geografische breedte van de waarnemer is b (zie figuur 6.2).

Door het oorspronkelijke assenstelsel om de x-as over een hoek $-(90 - b)$ te draaien verandert de x-as (x' -as) natuurlijk niet, valt de nieuwe y-as (y' -as) in de horizon van de waarnemer en de z-as (z' -as) samen met de verticaal over de waarnemer. Deze draaiing is, kijkend in de richting van de x-as tegen de klok, dus in de algemene rotatie matrices is dit een negatieve rotatie om de x-as, daarom: $-(90 - b)$. De coördinaten van punt S in het nieuwe assenstelsel zijn x_1 , y_1 en z_1 . Bij rotatie om de x-as verandert de waarde van x niet, dus $x_1 = x_0$; dit volgt natuurlijk ook uit de rotatie formules.



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-(90-b)) & \sin(-(90-b)) \\ 0 & -\sin(-(90-b)) & \cos(-(90-b)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90-b) & -\sin(90-b) \\ 0 & \sin(90-b) & \cos(90-b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

zodat:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0$$

$$y_1 = y_0 \sin(b) - z_0 \cos(b)$$

$$z_1 = y_0 \cos(b) + z_0 \sin(b)$$

De figuren 6.1 en 6.2 kunnen, met verplaatsing van het mannetje naar M ook

gezien worden als afbeeldingen van de hemelsfeer.

Merk op dat als $z_1 < 0$ de zon (onzichtbaar) onder de horizon is.

Hiermee is ook **de formule voor de halve dagboog** (zie Hoofdstuk 1, bladzijde 9) af te leiden, immers: $z_1 = y_0 \cos(b) + z_0 \sin(b) = \cos(P) \cdot \cos(\text{decl}) \cdot \cos(b) + \sin(\text{decl}) \cdot \sin(b) = 0$ of $\cos(P) = -(\sin(\text{decl}) \cdot \sin(b)) / (\cos(\text{decl}) \cdot \cos(b))$

zodat bij zonsopkomst en/of -ondergang $\cos(P) = -\tan(b) \cdot \tan(\text{decl})$

De rode boog in figuur 6.2 is h , de hoogte van de zon boven de horizon.

Merk op dat $S - S'' = z_1 = \sin(h)$:

Op blz.2 is gevonden: $x_0 = \sin(P) * \cos(d)$

$$y_0 = \cos(P) * \cos(d)$$
$$z_0 = \sin(d)$$

Het is nu mogelijk om met deze gegevens de formules voor de hoogte h en het azimut T zoals ze in de Bijlage Bolgonio en Astro gevonden zijn af te leiden.

ZONNEWIJZERS

Tussenstap: formules voor de hoogte en het azimut van de zon

Formule voor de Hoogte h:

$$\begin{aligned}\sin(h) &= z_1 = y_0 * \cos(b) + z_0 * \sin(b) = \\ &= \cos(P) * \cos(d) * \cos(b) + \sin(d) * \sin(b)\end{aligned}$$

$$\text{of } \sin(h) = \sin(b) \sin(d) + \cos(b) \cos(d) \cos(P)$$

Deze formule is eerder met behulp van formules uit de bolgoniometrie gevonden in Hoofdstuk 1: Enkele Toepassingen in de astronomische navigatie.

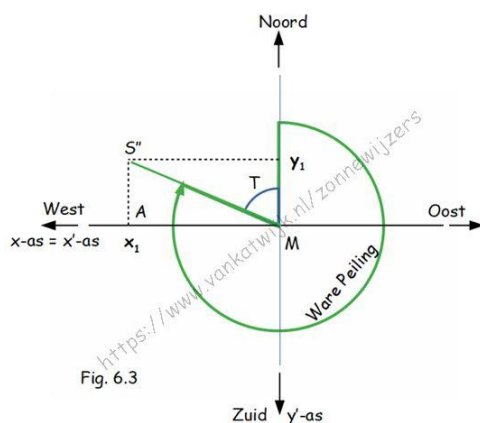
De positie van de waarnemer (W) kan ook gegeven door:

$$x_w = 0, \quad y_w = \cos(b) \text{ en } z_w = \sin(b) \quad (\text{zie figuur 6.1})$$

Hoek WMS = $90^\circ - h$. Nu kan de formule voor de hoogte ook gevonden worden met het **inwendig product van de vectoren** $s = MS$ en $w = MW$, beide met lengte = 1

$$0 * \sin(P) * \cos(d) + \cos(b) * \cos(P) * \cos(d) + \sin(b) * \sin(d) = 1 * 1 * \cos(90^\circ - h)$$

zodat ook nu volgt: $\sin(h) = \sin(b) \sin(d) + \cos(b) \cos(d) \cos(P)$



Formule voor het Azimut:

$$\tan(T) = \frac{x_1}{-y_1} = \frac{\sin(P) \cos(d)}{-\sin(b) \cos(d) \cos(P) + \cos(b) \sin(d)}$$

$$\cotan(T) = \frac{\cos(b) \sin(d) - \sin(b) \cos(d) \cos(P)}{\sin(P) \cos(d)}$$

$$\cotan(T) \sin(P) = \cos(b) \tan(d) - \sin(b) \cos(P)$$

Ook deze formule is eerder met behulp van formules uit de bolgoniometrie gevonden in Hoofdstuk 1: Enkele Toepassingen in de astronomische navigatie.

Willekeurige stand van het zonnewijzervlak

Om een willekeurige stand van het zonnewijzervlak te krijgen wordt het zonnewijzervlak eerst over een hoek d geroteerd om de z' -as, dit geeft de nieuwe assen x'' -as, y'' -as en z'' -as = z' -as. Hoek d is dus een rotatie in het horizontale vlak en wordt wel de **declinatie van het vlak** genoemd. Het is ook het azimut van de gnomon.

Voor rotatie d geldt: Zuid = 0° , positief naar west (als in figuur 6.4), negatief naar oost. $-180^\circ \leq d \leq 180^\circ$.

De getekende rotatie d om de z_2 -as is dus positief, echter tegen de draairichting waarop de algemene formules op blz. 1 gebaseerd zijn.

ZONNEWIJZERS

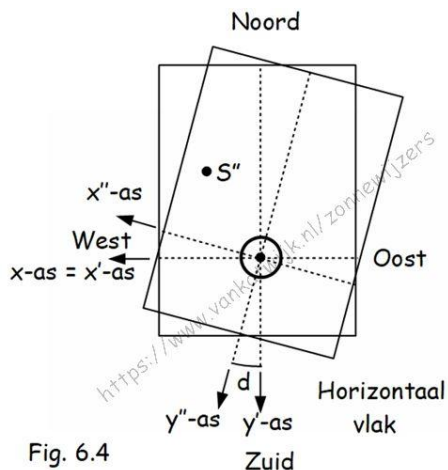


Fig. 6.4

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-d) & \sin(-d) & 0 \\ -\sin(-d) & \cos(d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(d) & -\sin(d) & 0 \\ \sin(d) & \cos(d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zodat: } x_2 = x_1 \cos(d) - y_1 \sin(d)$$

$$y_2 = x_1 \sin(d) + y_1 \cos(d)$$

$$z_2 = z_1$$

Na deze rotatie volgt een rotatie over een hoek i om de x_2 -as.

i is de **inclinatie van het vlak**; dit is de zenit afstand van het eindpunt van de gnomon. $0^\circ \leq i \leq 180^\circ$. (horizontaal $i=0^\circ$, verticaal $i=90^\circ$). De rotatie i om de x'' -as in figuur 6.5 is dus positief, echter tegen de draairichting waarop de algemene formules op blz. 1 gebaseerd zijn.

Door deze definitie wordt de zonnwijzer op zuiderbreedte (met draaiing $d = 0^\circ$) bij positieve i van de zon afgekeerd; daar moet de zonnwijzer dus vaak 180° gedraaid worden om een zinvolle zonnwijzer te krijgen.

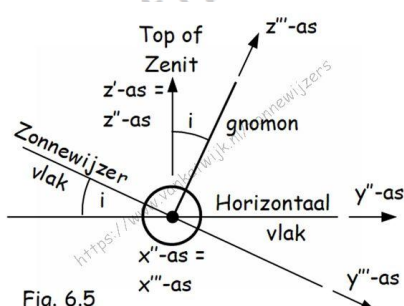


Fig. 6.5

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-i) & \sin(-i) \\ 0 & -\sin(-i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Zodat:

$$x_3 = x_2$$

$$y_3 = y_2 \cos(i) - z_2 \sin(i)$$

$$z_3 = y_2 \sin(i) + z_2 \cos(i)$$

(x_3, y_3, z_3) zijn de coördinaten van de zon in dit (zonnwijzer) assenstelsel.

z_3 is de theoretische lengte van de gnomon. Als g de lengte van de gnomon haaks op het zonnwijzervlak is (het eindpunt van de gnomon is het schaduwgevend punt met $g > 0$), dan worden de coördinaten x en y op het zonnwijzervlak gegeven door:

$$x = x_3 * g / z_3 \quad \text{en} \quad y = y_3 * g / z_3$$

Samenvatting:

Met de behulp van de onderstaande formules zijn de x en y coördinaten van het schaduwpunt van de top van de gnomon op het zonnwijzervlak te berekenen.

Coördinaten ten opzichte van de (hemel-)equator

$$x_0 = \sin(P) * \cos(\text{decl}) \quad \text{decl is de declinatie van de zon}$$

$$y_0 = \cos(P) * \cos(\text{decl}) \quad P \text{ is de plaatselijke westelijke uurhoek (LHA) van de zon}$$

$$z_0 = \sin(d)$$

ZONNEWIJZERS

Coördinaten ten opzichte van de horizon zijn:

$$x_1 = x_0$$

$$y_1 = y_0 \sin(b) - z_0 \cos(b) \quad b \text{ is de geografische breedte van de zonnwijzer}$$

$$z_1 = y_0 \cos(b) + z_0 \sin(b)$$

als $z_1 < 0$ dan is de zon (onzichtbaar) onder de horizon is.

Coördinaten na rotatie om de z-as (van voet naar top, loodrecht op het horizontale vlak)

$$x_2 = x_1 \cos(d) - y_1 \sin(d) \quad d \text{ is de rotatie in het horizontale vlak}$$

$$y_2 = x_1 \sin(d) + y_1 \cos(d)$$

$$z_2 = z_1$$

Coördinaten na rotatie over een hoek i , de zenit afstand van het eindpunt van de gnomon

$$x_3 = x_2$$

$$y_3 = y_2 \cos(i) - z_2 \sin(i)$$

$$z_3 = y_2 \sin(i) + z_2 \cos(i)$$

als $z_3 < 0$ dan is de zon niet boven het zonnwijzervlak.

De coördinaten van het schaduwpunt van de top van de gnomon op het zonnwijzervlak

$$x = x_3 * g / z_3 \quad g \text{ is de lengte van de gnomon}$$

$$y = y_3 * g / z_3 \quad \text{Controleer of } x \text{ en } y \text{ binnen het zonnwijzervlak vallen}$$

In een programma is het aan te raden de berekeningen voor de verschillende rotaties apart uit te voeren. Dit is voor de overzichtelijkheid, maar bijvoorbeeld ook om tijdens de berekening te bepalen of de zon boven de horizon en boven het zonnwijzervlak staat.

Coördinaten van het voetpunt van de poolstijl en de x-y-richting

Als niet de coördinaten van de zon, maar de coördinaten van $P_N(0, 0, 1)$ in het oorspronkelijke assenstelsel worden gekozen, dan is het punt (x, y) het voetpunt van de poolstijl en $\sin(v) = z_3/1$, immers dan is

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \cos(b) * \sin(d), \quad x_3 = \cos(b) * \sin(d),$$

$$y_1 = -\cos(b) \text{ en} \quad y_2 = -\cos(b) * \cos(d), \quad y_3 = -\cos(b) * \cos(d) * \cos(i) - \sin(b) * \cos(i) \text{ en}$$

$$z_1 = \sin(b) \quad z_2 = \sin(b) \quad z_3 = -\cos(b) * \cos(d) * \sin(i) + \sin(b) * \cos(i)$$

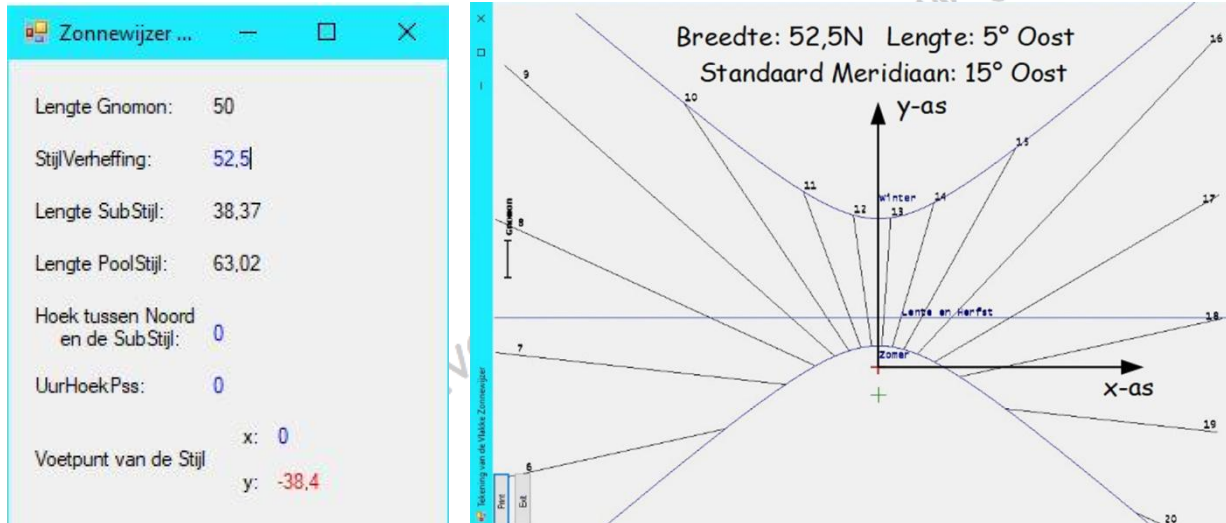
Vergelijk z_3 met de formule voor $\sin(v)$ van bladzijde 5 in Hoofdstuk 3.

$$\sin(v) = \sin(b_B) = \cos(i) * \sin(b_A) - \sin(i) * \cos(b_A) * \cos(d) \text{ ofwel } v = \arcsin(z_3)$$

Om de berekeningen in een programma te kunnen maken en de diverse lijnen te kunnen tekenen moeten ook de waarden van de declinatie en van de tijdvereffening berekend worden. Hiervoor zijn verschillende mogelijkheden die in Hoofdstuk 7 besproken worden.

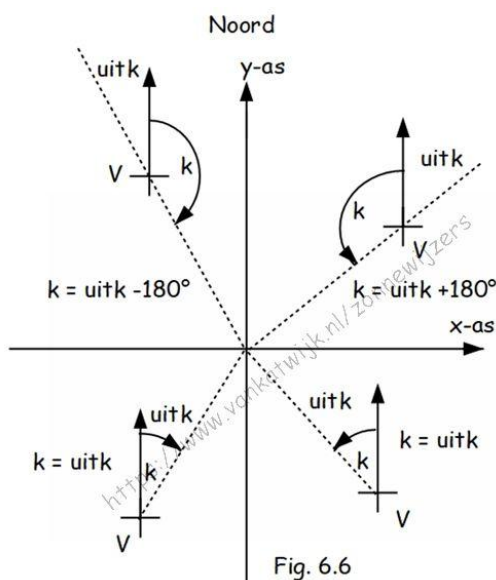
ZONNEWIJZERS

Alle gevonden coördinaten zijn de herleide coördinaten van de zon na de diverse draaiingen van het projectievlak. Het schaduwpunt ligt hier diametraal tegenover. Anders gezegd: in de tekening van de zonnewijzer zijn de x''-as en de y''-as omgedraaid. Kijk bijvoorbeeld naar het voetpunt van de poolstijl. Zonder draaiing d en inclinatie i zijn de coördinaten: $x_3 = x_1 = 0$ en $y_3 = y_1 = -\cos(b)$. In de tekening ligt het voetpunt zuid van de oorsprong van het assenstelsel. De richting van de y-as is dus noord gericht.



Het juiste kwadrant van hoek k tussen de Noordrichting en de substijl

In Hoofdstuk 3 is op blz. 3.3 afgeleid: $\tan(k) = \sin(d) / (\cos(i) \cdot \cos(d) + \sin(i) \cdot \tan(b))$



Deze formule geeft op de rekenmachine een hoek tussen -90° en $+90^\circ$ en moet dus herleid worden naar het juiste kwadrant. Ook is in Hoofdstuk 3 aangegeven dat het nulpunt wordt gerekend van de naar boven lopende loodlijn en dat hoek k linksom positief wordt gerekend. In figuur 6.6 is de oorsprong van het assenstelsel het voetpunt van de gnomon. V is in elk kwadrant het voetpunt van de poolstijl. "uitk" is de uitkomst die de rekenmachine ($\arctan(\dots)$) geeft. In de verschillende kwadranten staat de formule waarmee de gecorrigeerde hoek k wordt berekend. In een programma betekent dit:

Als $y > 0$ en $x > 0$ dan $k = \text{uitk} + 180^\circ$

Als $y > 0$ en $x < 0$ dan $k = \text{uitk} - 180^\circ$

Als $y < 0$ dan $k = \text{uitk}$

