

ZONNEWIJZERS

Hoofdstuk 2 Eerste kennismaking met zonnewijzers

Inhoud:

Definities van enkele begrippen	blz. 2.1
De equatoriale zonnewijzer	blz. 2.2
De armillosfeer	blz. 2.3
De horizontale zonnewijzer	blz. 2.4
De verticale (zuid-)zonnewijzer	blz. 2.6
Uurvlakken	blz. 2.8
De verticale Oost-, West- en Noord- zonnewijzer	blz. 2.8
De verticale Noord zonnewijzer	blz. 2.9
De Verticale Oost- de West zonnewijzer	blz. 2.10

Definities van enkele begrippen

Een zonnewijzer kan niet alleen de zonnetijd (uurhoek) en zelfs niet alleen onze kloktijd aangeven, maar in feite alle coördinaten van de zon.

Om een zonnewijzer te kunnen maken moeten direct al een paar begrippen worden gedefinieerd.

Een **poolstijl** is een staaf evenwijdig aan de aardas (en hemelas). Deze is dus altijd noord-zuid gericht en ligt in het meridiaanvlak van de waarnemer (zonnewijzer).

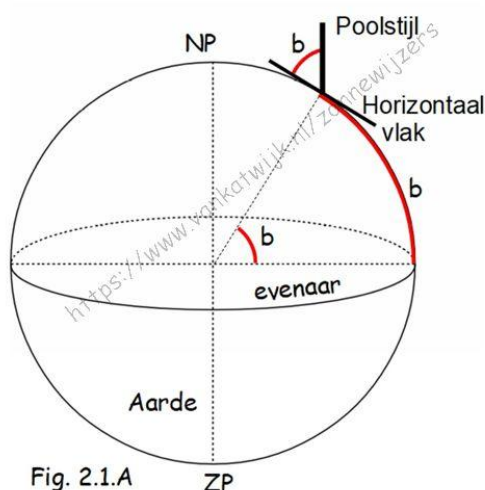


Fig. 2.1.A

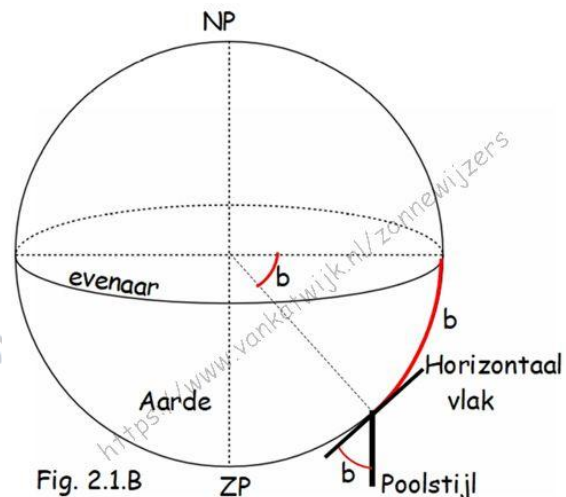
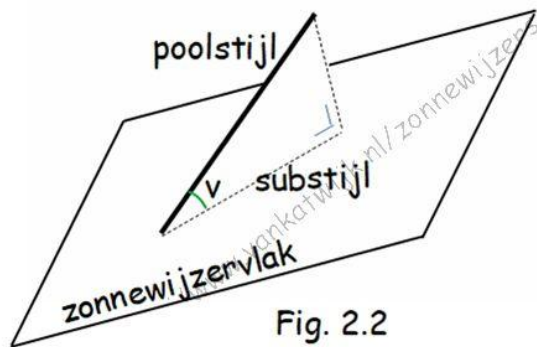


Fig. 2.1.B

In figuur 2.1.A is een poolstijl getekend voor een zonnewijzer op noorderbreedte, in figuur 2.1.B voor een zonnewijzer op zuiderbreedte. Te zien is dat de poolstijl altijd een hoek gelijk aan de geografische breedte maakt met het horizontale vlak (Hoofdstuk 1: Poolshoogte = HemelBreedte). Ook valt op dat de poolstijl op noorderbreedte naar het noorden wijst en op zuiderbreedte naar het zuiden. Net als de breedte krijgt deze hoek respectievelijk een positief en een negatief teken.

ZONNEWIJZERS

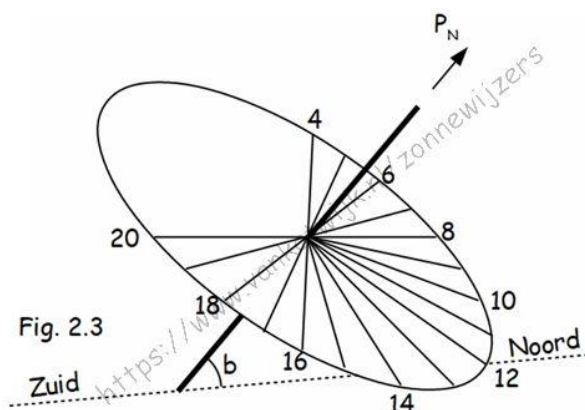


De **stijlverheffing** (v) is de hoek tussen het zonnepijpervlak en de poolstijl. Merk wel op dat het zonnepijpervlak (lang) niet altijd het horizontale vlak is.

De **substijl** is de projectie van de poolstijl op het zonnepijpervlak. De stijlverheffing is positief als de poolstijl naar de hemel noordpool P_N wijst.

De equatoriale zonnepijp

Zoals bekend staat het equatorvlak loodrecht op de aardas. Een vlak loodrecht op de poolstijl is dus evenwijdig aan het equatorvlak. Een zonnepijp met een zonnepijpervlak dat loodrecht staat op de poolstijl heet daarom een **equatoriale zonnepijp**. De foto rechts is genomen in de SonnenUhrenWeg in Bad Schandau (Stadtteil Krippen). Een dergelijke zonnepijp heeft een onder- en een bovenkant. In figuur 2.3 wordt vanuit het noord-oosten naar de bovenkant van een zonnepijp op b° NB gekeken.



Deze bovenkant wordt belicht als de declinatie Noord of positief is, dus tussen 21 maart en 23 september, de onderzijde de andere helft van het jaar.

In de getekende situatie is de stijlverheffing $v = +90^\circ$. Voor de onderzijde geldt $v = -90^\circ$. Het is **12 uur ware tijd of zonnetijd** als de zon in de boven meridiaan staat. De 12 uur schaduwlijn is dus eenvoudig te tekenen. De uurhoek van de zon verandert $360^\circ/24 \text{ uur} = 15^\circ/\text{uur}$. De hoek tussen de schaduwlijnen is daarom ook 15° . Op de zonnepijp kunnen nu vanaf het middelpunt richting de 12 uur lijn eenvoudig lijnen om de 15° worden afgezet. De lijn van 6 uur en 18 uur loopt dus **evenwijdig met het horizontale vlak**. Vaak wordt de zonnetijd aangegeven met Romeinse cijfers (12 uur is dan XII). Omdat het zelden voorkomt dat op een zonnepijp zowel de ware zonnetijd als een andere tijd, zoals onze kloktijd, wordt weergegeven gebruik ik ook voor de zonnetijd onze "gewone" Arabische cijfers en tel ik door na 12 uur.

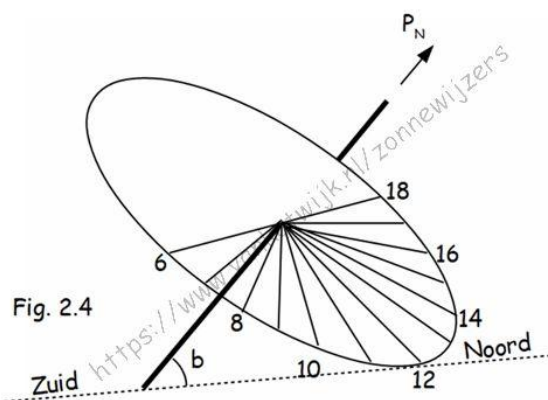
Blijft nog wel de vraag: wat is voor deze breedte de eerst en wat de laatst mogelijke

ZONNEWIJZERS

schaduwlijn (zonnetijd)? In Hoofdstuk 1 is de formule voor de **tijd van opkomst** afgeleid: $\cos(180^\circ - P) = \tan(b) \cdot \tan(d)$. Stel dat deze zonnwijzer gemaakt wordt voor $b = +52^\circ$. Op de langste dag (zon vroegst op en laatst onder) is de declinatie $d = +23,5^\circ$. Hiermee: $\cos(180^\circ - P) = \tan(52) \cdot \tan(23,5) = 0,5565$, zodat $180^\circ - P = 56,18^\circ$ of in tijd $56,18/15 = 3,7456$ uur ofwel **3^u45^m**.

De eerste tijd is dus 4 uur zijn en de laatste $24 - 4 = 20$ uur.

Zie voor twee uitgebreide tekeningen van de lijnen op een equatoriale zonnwijzer in Auckland (Nieuw Zeeland) de figuren op bladzijde 9 en 10 in Hoofdstuk 8.



In figuur 2.4 is de onderkant van de zonnwijzer getekend. Er wordt (dus) vanaf het zuid-oosten naar de zonnwijzer op b° NB gekeken. De telling begint nu bij 6 uur. De maximale declinatie in de periode tussen 23 september en 21 maart is immers 0° waarmee $180^\circ - P = 90^\circ$ (6 uur). In figuur 2.3 loopt de uurtelling met de klok mee, rechtsonder. Wat nu moet opvallen is dat de uurtelling tegen de wijzers van de klok, linksom, loopt.

Er is een **relatie tussen het teken van de stijlverheffing v , de richting van de poolstijl en de richting waarin de uurlijnen lopen**. Als $v > 0$, dan wijst de poolstijl naar de (hemel-)noordpool en loopt de telling van de uren met de klok mee, als $v < 0$ dan wijst de poolstijl naar de (hemel-)zuidpool en loopt de telling van de uren tegen de wijzers van de klok in.

De armillosfeer



De armillosfeer wordt, hoewel anders van uiterlijk dan de zonnwijzer van de vorige paragraaf, ook wel equatoriale zonnwijzer genoemd. Op de foto rechts, gemaakt in de SonnenUhrenWeg in Bad Schandau (Stadtteil Krippen) is te zien dat dit ook een **cilinder zonnwijzer** kan zijn. De links afgebeelde armillosfeer voor een breedte van $52,5^\circ$ NB is gemaakt in



OpenSCAD en op een 3D printer gerealiseerd. De as, evenwijdig aan de aardas, dus met een hoek van $52,5^\circ$ ten opzichte van het horizontale vlak is de schaduwgevende poolstijl. De schaduw van deze stijl valt op de binnenzijde van de hoepel. De halfronde cirkelband loodrecht op de poolstijl is evenwijdig aan het equatorvlak. Vaak wordt de equatorband

ZONNEWIJZERS

niet half, maar geheel rond gemaakt. Deze zonnewijzer wordt daarom ook wel **hoepelsfeer** genoemd. De hoepel is in feite de buitenrand van de equatoriale zonnewijzer van figuur 2.4. Een complete armillosfeer heeft meerdere (gehele) hoepels: de meridiaan van de waarnemer, de equatorband, banden op $23,5^\circ$ noord en zuid om de uitersten van de declinatie (de keerkringen) aan te geven en soms ook banden op $66,5^\circ$ vanaf de evenaar om de poolcirkels aan te geven.

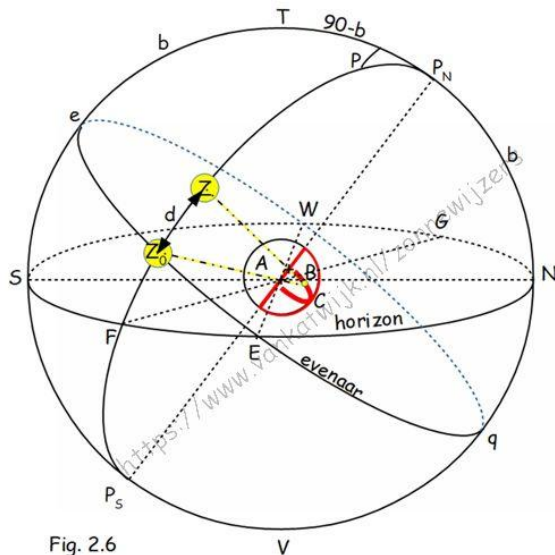


Fig. 2.6

In figuur 2.6 is de kleine bol een voorstelling van de armillosfeer met de rode poolstijl als schaduwgever. Z₀ is de positie van de zon op een bepaalde tijd in de ochtend als de declinatie nul is (ongeveer 21 maart en 23 september). Z is de positie van de zon op dezelfde tijd met een noordelijke declinatie (lente of zomer).

De poolstijl en de zon (ongeacht de declinatie, dus ongeacht de datum) liggen in vlak P_NAZ₀ (de uurcirkel van de zon). Op de bijbehorende tijd snijdt dit vlak P_NAZ₀ de achter liggende equatorband in B. Hier kan de ware zonnetijd worden afgelezen.

Het is 12 uur (ware zonnetijd) als de zon "in de meridiaan" van de waarnemer (op de boog P_NTeS) staat. De 12 uur streep op de zonnewijzer wordt daarom gezet op het snijpunt van vlak P_NNq en de cirkelband (punt C). Op de cirkelband worden daarna, met als hoekpunt het midden van de rode schaduwgevende as, om de 15° uurstreepjes naar links en naar rechts gezet. Hier worden de hele uren 11, 10, enz aan de westkant en 13, 14 enz aan de oostkant bij gezet. Het zal duidelijk zijn dat de lijn tussen de strepen van 6 uur en 18 uur Oost-West loopt.

De horizontale zonnewijzer

In figuur 2.6 is te zien dat de schaduw van de poolstijl, de rode staaf in de tekening ongeacht de datum op het horizontale vlak langs de lijn FG valt. Dit is de snijlijn van het uurvlak P_NZ₀P_S met het horizontale vlak NES. De uurlijnen van deze zonnewijzer zijn dus onafhankelijk van de datum (declinatie). Omdat de uurlijnen onafhankelijk zijn van de datum kan de situatie voor 21 maart en 23 september (declinatie = 0) getekend worden.

ZONNEWIJZERS

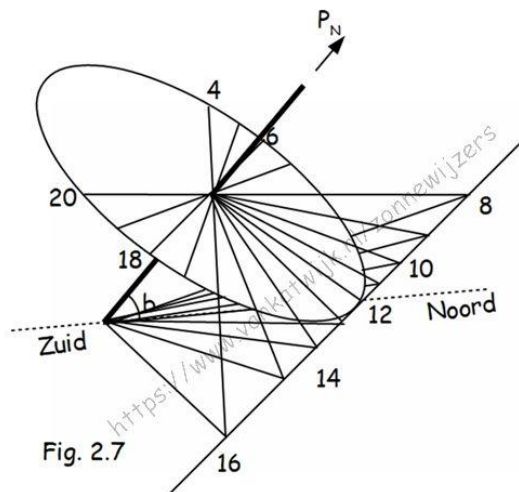


Fig. 2.7

Evenwijdig aan de lijn van 6 uur en 18 in figuur 2.7 wordt door het 12 uur punt een lijn in het horizontale vlak getekend, dit is ook de snijlijn van het vlak van de equatoriale zonnwijzer met het horizontale vlak. Door nu de uurlijnen van de equatoriale zonnwijzer door te trekken naar deze lijn en vervolgens de snijpunten te verbinden met het voetpunt van de poolstijl worden de uurlijnen van de horizontale zonnwijzer gevonden. De stijlverheffing v van de horizontale zonnwijzer is positief (b°) zodat ook op

deze zonnwijzer de uurlijnen rechtsonder lopen. De horizontale zonnwijzer is nu, uitgaande van de equatoriale zonnwijzer, te construeren. Daarvoor wordt eerst een relatie tussen de hoek die de uurlijnen maken met de 12 uurlijn (hoek z in figuur 2.8), de breedte b en de uurhoek P afgeleid.

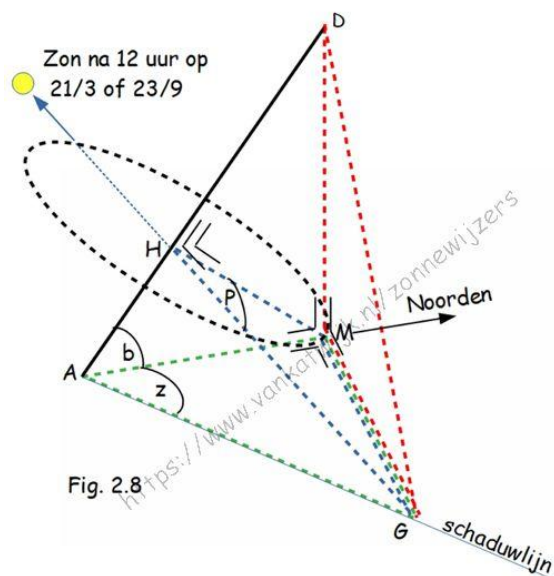
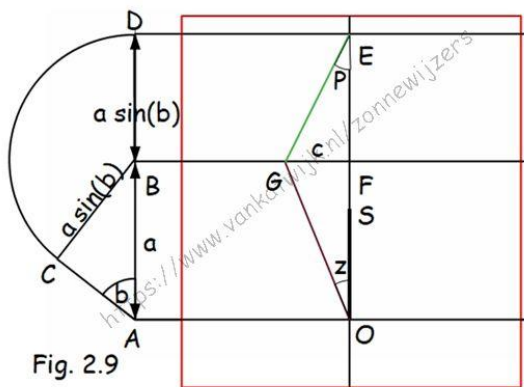


Fig. 2.8

AM is de Zuid-Noord lijn (12 uur lijn).
AD is de schaduwgevende poolstijl.
Vlak AGM (groen) is het horizontale vlak.
Vlak GMD (rood) is een Oost-West gericht verticaal vlak.
Vlak GHM (blauw) staat loodrecht op de poolstijl en is dus het vlak van de equatoriale zonnwijzer.
Hoek GHM is de (westelijke) uurhoek P .
 $\sin(b) = MH/AM$, hieruit $AM = MH/\sin(b)$
 $\tan(P) = GM/MH$, hieruit $GM = MH \tan(P)$
 $\tan(z) = GM/AM = MH \tan(P) / (MH/\sin(b))$
of: **$\tan(z) = \sin(b) \cdot \tan(P)$**
Hiermee zijn de uurlijnen te tekenen.

Voor de constructie wordt nu een vaste afstand gekozen ofwel voor de lengte van de 12 uur lijn van de equatoriale zonnwijzer, ofwel voor de lengte van de te maken horizontale zonnwijzer. Ik kies hier voor de lengte $AB = a$ in figuur 2.9 van de 12 uur lijn van de te maken horizontale zonnwijzer. Maar wellicht een goede oefening om de andere keuze zelf te maken.

ZONNEWIJZERS



door de punten A, B en D.

Teken een rechthoek die over deze drie lijnen valt, het rode vlak.

Teken een lijn evenwijdig aan AD die dit rode vlak in tweeën deelt. Dit geeft de punten E, F en O.

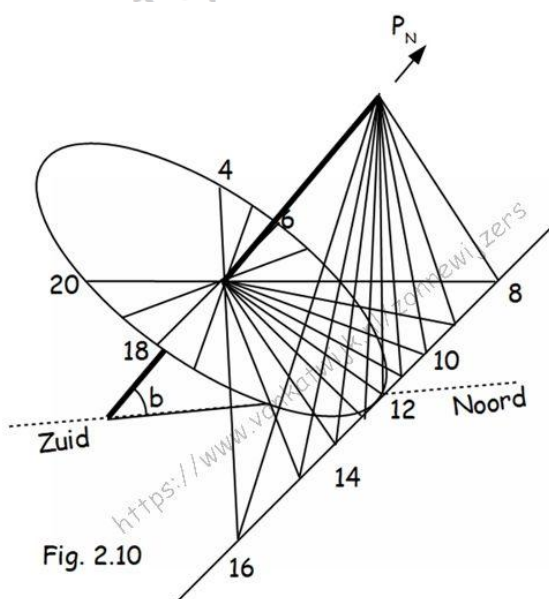
Zet in E een uurhoek P uit. Het been, de groene lijn, snijdt de lijn door B in G.

Trek de lijn OG, dit is de schaduw van de zwarte poolstijl OS.

Immers: $\tan(P) = GF / EF = c / (a \sin(b))$ Hiermee: $c = a \sin(b) \tan(P)$ en:

$$\tan(z) = GF / OF = c / a = a \sin(b) \tan(P) / a = \sin(b) \tan(P)$$

De verticale (zuid-)zonnewijzer

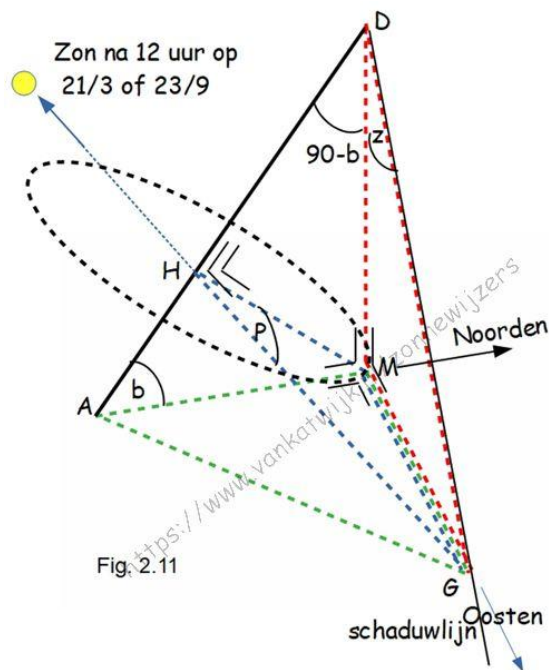


uitgaande van de equatoriale zonnewijzer, te construeren. Daarvoor wordt eerst een relatie tussen de hoek die de uurlijnen maken met de 12 uurlijn (hoek z in figuur 2.11), de breedte b en de uurhoek P afgeleid.

Teken een lijn AB met lengte a en zet vanuit A een hoek ter grootte van de geografische breedte b uit.
Laat vanuit B de loodlijn neer op het been van deze hoek; dit geeft punt C. De lengte van BC is nu $a \sin(b)$.
Teken de cirkel met middelpunt B en straal BC tot deze het verlengde van AB snijdt; dit geeft punt D.
Teken loodrecht op AD drie lijnen resp.

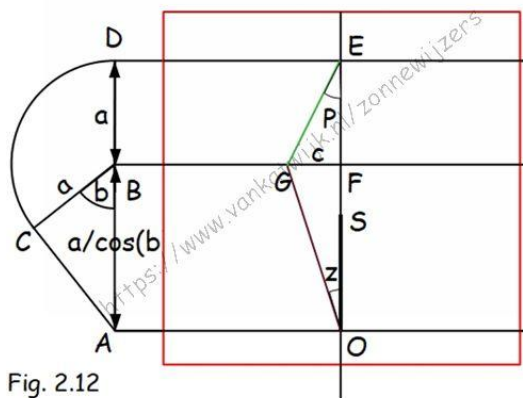
Vergelijk figuur 2.10 met figuur 2.7. Nu worden de snijpunten op de horizontale lijn verbonden met het snijpunt van de poolstijl met het verticale vlak.
De hier getekende verticale zonnewijzer wordt ook wel zuid zonnewijzer genoemd omdat het vlak naar het zuiden gericht is. De stijlverheffing, de hoek tussen het zonnewijzervlak en de poolstijl is bij deze verticale zonnewijzer negatief ($b^\circ - 90^\circ$) omdat de poolstijl nu naar de hemel zuidpool wijst. Vanuit zuid naar de zonnewijzer kijkend lopen de uurlijnen nu ook linksom. De verticale zonnewijzer is, net als de horizontale zonnewijzer,

ZONNEWIJZERS



AD is de schaduwgevende poolstijl.
 Vlak AGM (groen) is het horizontale vlak.
 Vlak GMD (rood) is het Oost-West
 gerichte verticale zonnewijzer vlak.
 Vlak GHM (blauw) staat loodrecht op de
 poolstijl en is dus het vlak van de
 equatoriale zonnewijzer.
 Hoek GHM is de (westelijke) uurhoek P.
 Hoek ADM = $90 - b$.
 $\cos(b) = \sin(90-b) = HM/DM$;
 hieruit $DM = HM/\cos(b)$
 $\tan(P) = MG/HM$; hieruit $MG = HM \tan(P)$
 $\tan(z) = MG/DM = HM \tan(P)/(HM/\cos(b))$
 of **$\tan(z) = \cos(b) \cdot \tan(P)$**
 Hiermee zijn de uurlijnen te tekenen.
 Voor de constructie wordt net als bij de
 horizontale zonnewijzer een vaste afstand

gekozen ofwel voor de lengte van de 12 uur lijn van de equatoriale zonnewijzer, ofwel voor de lengte van de te maken horizontale zonnewijzer. Ik kies hier voor de lengte $BD = a$ in figuur 2.12 van de 12 uur lijn van de equatoriale zonnewijzer. Maar wellicht een goede oefening om de andere keuze zelf te maken.



Teken een verticale lijn met hierop punt B. Zet vanuit B een afstand a af, dit geeft punt D. Zet vanaf B een hoek b af als in figuur 2.12. Cirkel BD om totdat dit het been van hoek b snijdt in C. Teken loodrecht op BC in punt C een lijn totdat deze het verlengde van DB in A snijdt. Teken loodrecht op AD drie lijnen resp. door de punten A, B en D.

Teken een rechthoek die over deze drie lijnen valt, het rode vlak.
Teken een lijn evenwijdig aan AD die dit rode vlak in tweeën deelt. Dit geeft de punten E , F en O .

Zet in E een uurhoek P uit. Het been, de groene lijn, snijdt de lijn door B in G.

Trek de lijn OG , dit is de schaduw van de zwarte poolstijl OS .

Immers:

$$\tan(P) = c/a$$

Hiermee: $c = a * \tan(P)$

$$\tan(z) = GF / OF = c / (a/\cos(b)) = a * \tan(P) / (a/\cos(b)) = \cos(b) * \tan(P)$$

ZONNEWIJZERS

Uurvlakken

Door de equatoriale, de horizontale en de verticale zuid zonnwijzer te combineren, zie de figuren 2.7 en 2.10, is te zien dat elke uurlijn van de drie zonnwijzers in zelfde vlak ligt. Enkele van deze vlakken zijn in figuur 2.13 getekend. Het vlak gevormd door de

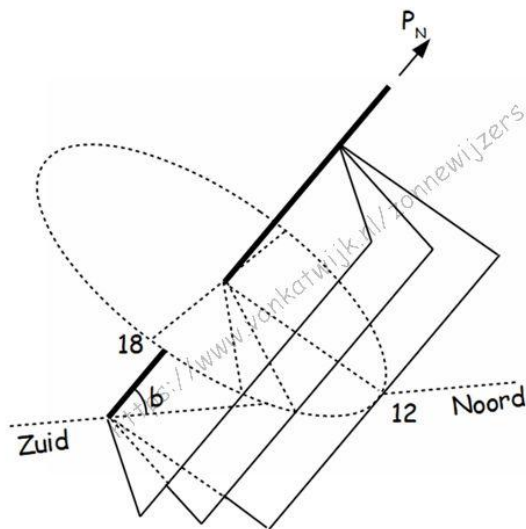


Fig. 2.13

een horizontaal of verticaal vlak te zijn. Een (plat zonnwijzer-) vlak kan elke richting hebben, maar een zonnwijzer vlak mag ook gekromd zijn zolang de snijlijn van dit vlak met het tijdvlak maar te bepalen is.

poolstijl en de noord-zuid lijn is het 12 uur vlak. Niet getekend is hetzelfde vlak naar het zuiden. Hoewel deze vlakken feitelijk één vlak vormen zou dit het 0 uur vlak zijn. De andere getekende vlakken gelden voor willekeurige tijden in de middag. De uurvlakken vallen samen met de meridiaanvlakken bij de betreffende uurhoek.

De schaduw van de poolstijl valt steeds in een dergelijk vlak. De snijlijn van zo'n tijdvlak met een willekeurig ander oppervlak geeft de hierbij horende tijdlijn op dit oppervlak. Dit hoeft dus niet alleen

De verticale Oost-, West- en Noord- zonnwijzer

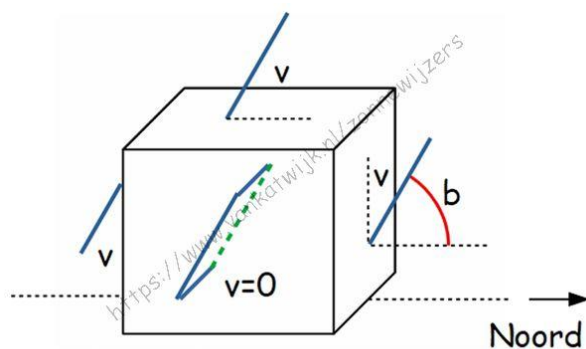


Fig. 2.14



Hiernaast een foto van een kubus zonnwijzer. Deze staat in de "SonnenUhrenWeg" in Bad Schandau (Stadtteil Krippen)

In figuur 2.14 zijn de poolstijlen van een noord, oost en zuid verticale en van een horizontale zonnwijzer op een kubus getekend. De stijlverheffing, immers de hoek tussen de poolstijl en de substijl, van de horizontale zonnwijzer is $+b^\circ$, van de verticale zuid zonnwijzer is $v = b^\circ - 90^\circ$, van de verticale noord zonnwijzer is $v = 90^\circ - b^\circ$. De poolstijl van de oost, maar ook van de west zonnwijzer is evenwijdig aan de (groen gestreepte) substijl, daarvoor geldt dus $v = 0^\circ$. De verticale zuid zonnwijzer en de horizontale zonnwijzer zijn hiervoor besproken.

ZONNEWIJZERS

De verticale Noord zonnwijzer

De verticale noord zonnwijzer geeft natuurlijk alleen de tijd aan vanaf zonsopkomst totdat de zon zuid van het zonnwijzervlak komt en 's avonds vanaf het moment dat de zon noord van het zonnwijzervlak staat tot zonsondergang.

Tijd van zonsopkomst hebben we eerder berekend met: $\cos(180^\circ - P) = \tan(b) * \tan(d)$.

Voor een breedte van $+52,5^\circ$ en een maximale noordelijke declinatie $+23,5^\circ$ geeft dit $\cos(180^\circ - P) = 0,5667$, waarmee $180^\circ - P = 55,48^\circ$ of in tijd $55,48^\circ / 15^\circ = 3,6988 = 3^u 42^m$.

De zonnwijzer begint dus bij 4 uur en eindigt 's avonds bij 20 uur.

Blijft de vraag: tot hoelang is de zonnwijzer 's morgens bruikbaar?

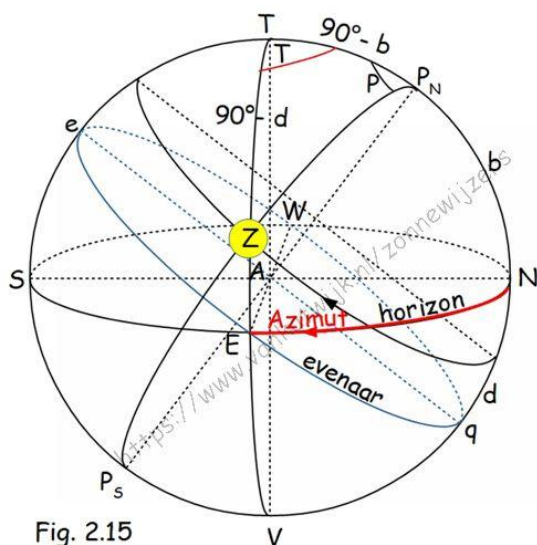


Fig. 2.15

Direct nadat de zon in het oost-west vlak staat verdwijnt de (schaduw van de) zon achter de verticale noord zonnwijzer. Het azimut, hoek T in figuur 2.15, is dan 90° . Boldriehoek P_N-T-Z is dus een rechthoekige boldriehoek waarvoor de regel van Neper geldt:

$$\cos(90^\circ - (90^\circ - b)) = \cotan(P) * \cotan(90^\circ - (90^\circ - d))$$

$$\cos(b) = \cotan(P) * \cotan(d)$$

$$\tan(P) = 1 / (\cos(b) * \tan(d))$$

met $b = +52,5^\circ$ en $d = 23,5^\circ$ geeft dit

$$\tan(P) = 3,7779, \text{ zodat } P = 75,174^\circ, \text{ d.w.z. tot } 12$$

uur, zon in het zuiden, duurt het nog

$$75,174^\circ / 15^\circ = 5,0116 \text{ uur} = 5^u 07^m$$

De zonnwijzer "werkt" dus tot ongeveer 7 uur in de ochtend en 's avonds vanaf ongeveer 17 uur. Onderstaande figuur 2.16 is gemaakt met het zonnwijzer programma dat te vinden is op <https://www.vankatwijk.nl/zonnwijzers>

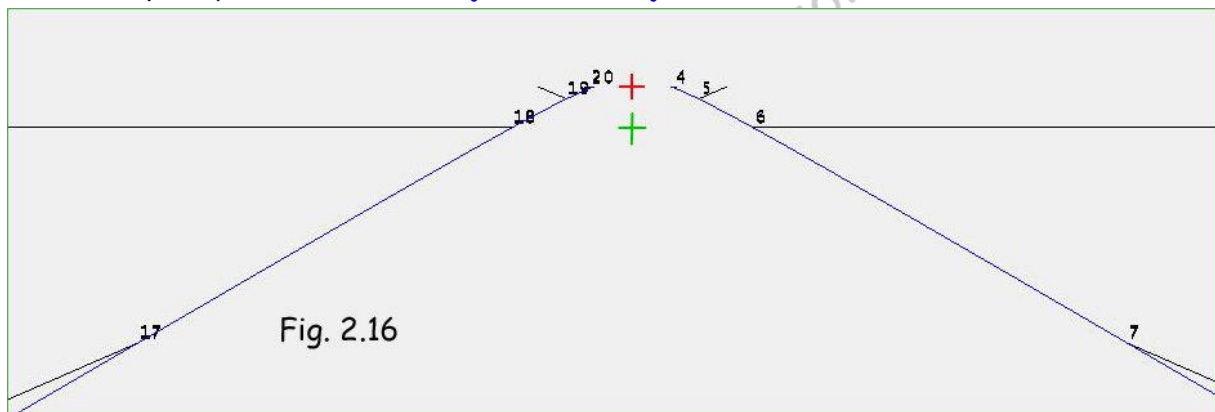
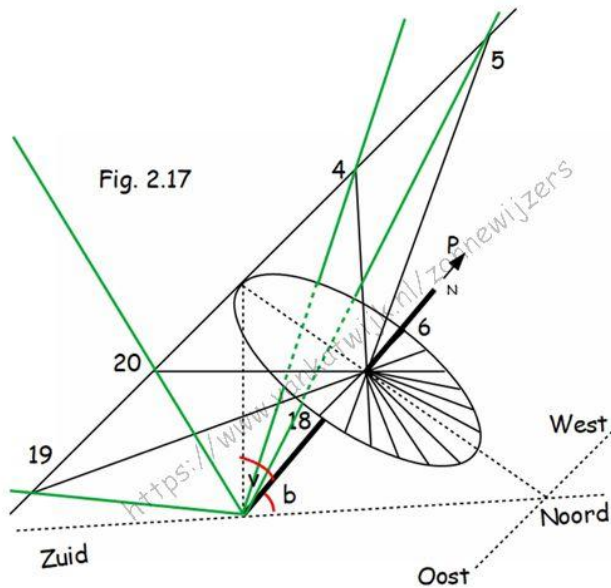


Fig. 2.16

Het groene kruis is de voet van de poolstijl. Het lijnstuk tussen het groene en het rode kruis is de substijl. De schuine lijnen in de figuur geven de grens aan vanaf waar het eindpunt van de poolstijl schaduw geeft. Hiermee is het mogelijk om ook de datum met een zonnwijzer te bepalen, maar daarover later meer.

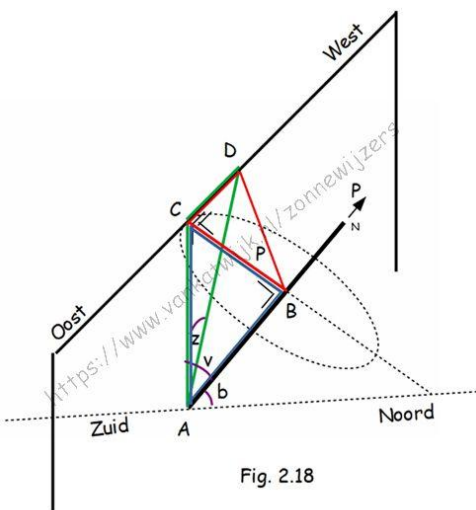
ZONNEWIJZERS



Net als in de figuren 2.7 en 2.10 kunnen we ook deze verticale noord zonnwijzer construeren. De groene lijnen zijn de uurlijnen.

Het vlak van de verticale noord zonnewijzer is evenwijdig aan het vlak van de verticale zuid zonnewijzer. Beide vlakken worden gesneden door de uurvlakken van figuur 2.13. De hoek z tussen een uurlijn en de substijl worden bij deze zonnewijzer daarom net zoals in figuur 2.11 door dezelfde formule gegeven: $\tan(z) = \cos(b) \cdot \tan(P)$. Hiermee zijn de uurlijnen van deze zonnewijzer te tekenen.

Wellicht ten overvloede wordt de formule ook voor deze zonnewijzer afgeleid.



Vergelijk figuur 2.18 met 2.17.

De zwarte omranding met Oost en West is het zonnewijzervlak.

De equatoriale zonnewijzer is gestippeld getekend met slechts één uurlijn, namelijk de lijn BD.

AD is de uurlijn op de verticale noord
zonnewijzer.

$$\tan(P) = CD/BC, \text{ zodat } CD = BC \cdot \tan(P)$$

$$\tan(z) = CD/AC = BC * \tan(P) / AC$$

$\sin(v) = BC/AC$, hiermee:

$\tan(z) = \sin(v) * \tan(P)$ of (stijlverheffing v is bij deze zonnwijzer gelijk aan $90^\circ - b$)

$$\tan(z) = \cos(b) * \tan(P).$$

De Verticale Oost- de West zonnwijzer

Beide zonnewijzers zijn in principe gelijk, daarom wordt hier alleen de verticale Oost zonnewijzer besproken. De poolstijl, in de richting van P_N ligt op een afstand a van het zonnewijzervlak, evenwijdig aan dit vlak. De substijl in het zonnewijzervlak is evenwijdig aan de poolstijl. De hoek tussen de substijl en de poolstijl is dus $v = 0^\circ$. Het vlak van de poolstijl en de substijl ligt in het vlak van de (hemel-)meridiaan door het oostpunt. Als de schaduw van de poolstijl op de substijl valt is het dus 6 uur. In de figuur is de zon getekend in de ochtend op 21 maart of 23 september als de declinatie nul is. Hoek P is de oostelijke uurhoek van de zon. Bedenk een equatoriale zonnewijzer met straal a in de kubus zoals in figuur 2.19. De snijlijn van het vlak van de equatoriale zonnewijzer met de kubus is lijn m . Om uurlijnen te tekenen worden vanuit het middelpunt van een cirkel met straal a hoeken van (veelvouden van) 15° vanaf de 6 uur lijn tot aan lijn m afgezet.

ZONNEWIJZERS

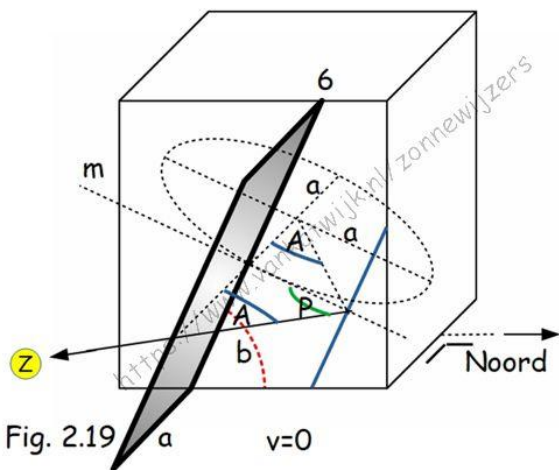


Fig. 2.19

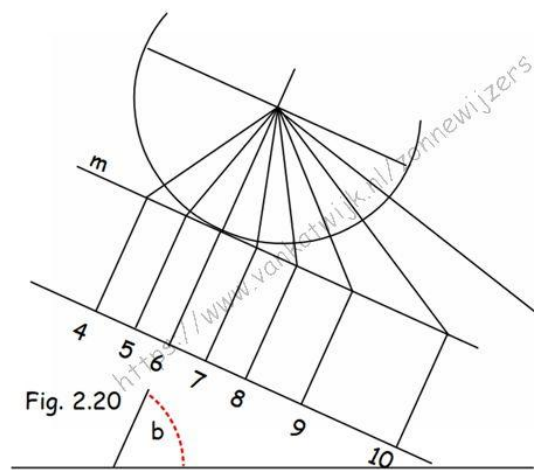


Fig. 2.20

Bij de verticale noord zonnwijzer is berekend dat op een breedte van $+52,5^\circ$ bij een maximale noordelijke declinatie $+23,5^\circ$ de zon om $3^u 42^m$ op komt. In figuur 2.20 zijn daarom de uurlijnen vanaf 4 uur getekend. Door de schaal van figuur 2.20 valt de 11 uur lijn buiten de tekening. Om 12 uur vallen de vlakken van de zonnwijzer en van de bovenmeridiaan waarin de zon staat samen.

Eenvoudig is nu te zien dat de afstand tussen de uurlijn van k uur en de uurlijn van 6 uur gegeven wordt door $a * \tan(|k - 6|)$.

In figuur 2.21, gemaakt met het Zonnwijzer Programma, zijn voor de volledigheid de uurlijnen van de verticale west zonnwijzer getekend.

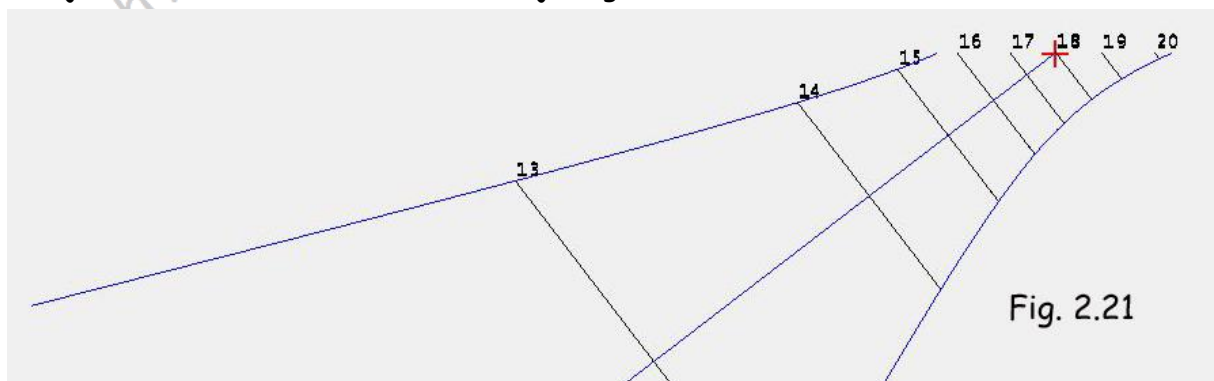


Fig. 2.21