

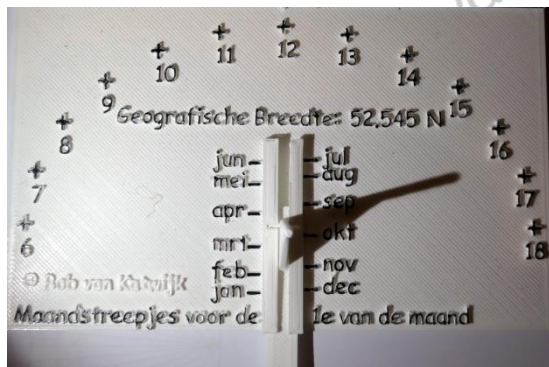
ZONNEWIJZERS

Hoofdstuk 12 De Analemmatische Zonnewijzer

Inhoud:

Inleiding	blz. 12.1
Het ontwerp	blz. 12.1
Vergelijking van de ellips en de brandpuntsafstand	blz. 12.2
De plaats van de schaduwgever	blz. 12.2
De plaats (M) van de schaduwgever met een constructie	blz. 12.3
De hoek Middelpunt-Brandpunt-Persoon	blz. 12.4
Bij welke persoonslengte komt de schaduw nog op de uurscijfers?	blz. 12.4
Waar valt het einde van de schaduw bij gegeven b, d en P?	blz. 12.5
Samenvatting	blz. 12.5

Inleiding



Geprint 3D model van een Analemmatische zonnewijzer voor $52^{\circ}.545$ Noorderbreedte (ook voor elke andere breedte te maken). De sleuf waarin de schaduwgever (dus te verschuiven) staat is Noord-Zuid gericht. Bij grotere versies van deze zonnewijzer is de schaduwgever een persoon die op de centrale as op de juiste datum gaat staan. Bij het ontwerpen kan rekening worden

gehouden met het (geografische) lengteverschil.

Het ontwerp

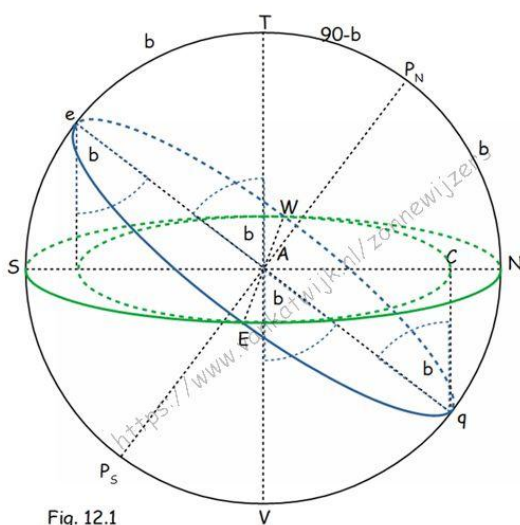


Fig. 12.1

De tijds aanduidingen bevinden zich op een ellips die ontstaat door het equatorvlak (het blauwe vlak) te projecteren op het horizontale vlak; dit geeft het groene gestreepte vlak door punt C. Vergelijk dit met het kijken naar een gekanteld wiel.

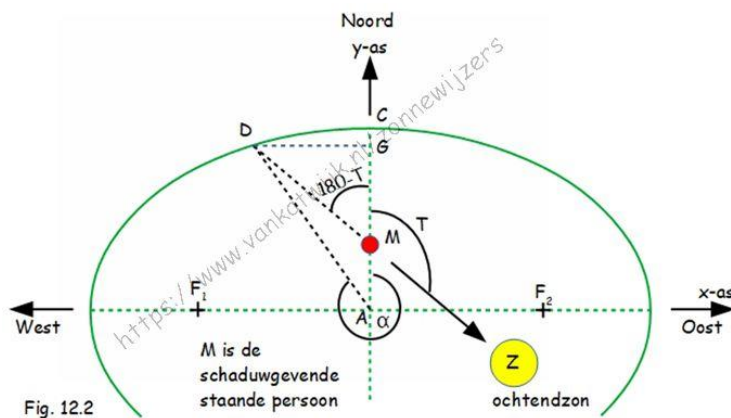
In figuur 12.1 is b = breedte van de waarnemer.

De **halve lange as** is $l = AE$ (= straal van de getekende bol).

$\sin(b) = AC / Aq$ zodat de **halve korte as** is $AC = Aq \cdot \sin(b) = l \cdot \sin(b)$.

ZONNEWIJZERS

Vergelijking van de ellips en de brandpuntsafstand



Kies een assenstelsel x y met oorsprong in A.

Een vergelijking van de ellips is dan (alfa rechtsonder vanaf AC)

$$x(\text{alfa}) = X_D = l \cdot \sin(\text{alfa}) \text{ en}$$

$$y(\text{alfa}) = Y_D = l \cdot \sin(b) \cdot \cos(\text{alfa})$$

F1 en F2 zijn brandpunten

$$AF = \sqrt{l^2 - (l \sin(b))^2}$$

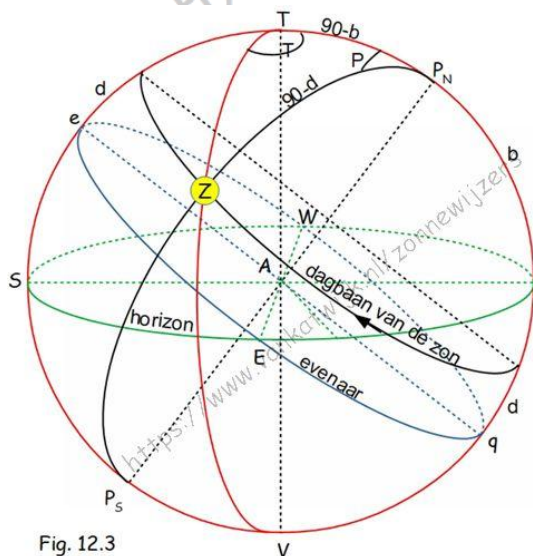
$$AF = \sqrt{l^2 - l^2 \cdot \sin(b)^2}$$

$$AF = \sqrt{l^2 \cdot (1 - \sin(b)^2)}$$

$$AF = \sqrt{l^2 \cdot \cos(b)^2} = l \cdot \cos(b)$$

De plaats van de schaduwgever

In figuur 12.2 geeft de ochtendzoon schaduw van de persoon (rode stip M) langs de lijn MD. De vraag is nu waar de persoon moet gaan staan zodat hoek CMD de Ware Peiling aangeeft en hoek alfa een maat is voor de tijd (dus de uurhoek P).



De cotangensregel van de bolgoniometrie (zie Hoofdstuk 1) in de boldriehoek $P_N T Z$ geeft:

$$\cotan(T) \cdot \sin(P) = \tan(d) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(P)$$

$$\cotan(T) = (\tan(d) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(P)) / \sin(P)$$

Hierin is P de Oostelijke uurhoek.

In figuur 12.2 is hoek GMD = $180 - T$

$$\cotan(GMD) = \cotan(180 - T) =$$

$$-\cotan(T) = \frac{MG}{-XD} \text{ of } MG = X_D \cdot \cotan(T)$$

Van blz. 1:

$$X_D = x(\text{alfa}) = l \cdot \sin(\text{alfa})$$

$$Y_D = y(\text{alfa}) = l \cdot \sin(b) \cdot \cos(\text{alfa})$$

$$AM = AG - MG = Y_D - X_D \cotan(T) =$$

$$= Y_D - l \cdot \sin(\text{alfa}) \cdot (\tan(d) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(P)) / \sin(P)$$

alfa wordt gerekend vanaf de Noordrichting, de uurhoek P vanaf de Zuidrichting;

bijvoorbeeld: als $\text{alfa} = 310^\circ$ (zie figuur 12.2) dan is $P = -50^\circ$.

Neem daarom $\text{alfa} = 360^\circ + P$ of $P = \text{alfa} - 360^\circ$

$$AM = Y_D - l \cdot \sin(360^\circ + P) \cdot (\tan(d) \cdot \cos(b) - \sin(b) \cdot \cos(\text{alfa} - 360^\circ)) / \sin(P)$$

$$AM = Y_D - l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b) + l \cdot \sin(b) \cdot \cos(\text{alfa}) = Y_D + l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b) - Y_D$$

$$AM = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b)$$

ZONNEWIJZERS

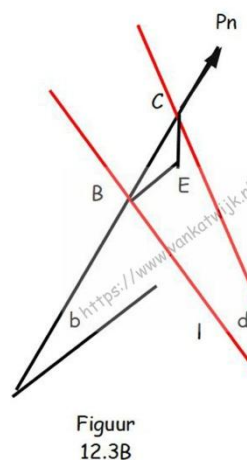
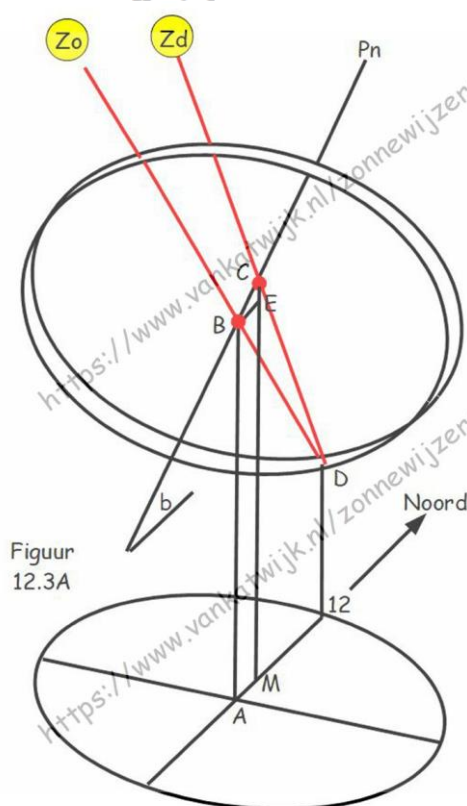
Merk op dat de vergelijking van de ellips nu gegeven kan worden door:

$$X(P) = l \cdot \sin(P) \text{ en } Y(P) = l \cdot \sin(b) \cdot \cos(P)$$

De plaats (M) van de schaduwgever met een constructie

In figuur 12.3A is een equatoriale zonnenuijzer getekend. De bijbehorende analemmatische zonnenuijzer is gevonden door de hoepelsfeer loodrecht op het horizontale vlak te projecteren. Z_0 is de zon om 12 uur als de declinatie nul is (Ram en Weegschaal), Z_d is de zon om 12 uur op een andere datum als de declinatie d is. Op de hoepelsfeer valt de schaduw van de poolstijl om 12 uur ware tijd, ongeacht de datum, altijd in punt D. Door vanuit D een loodlijn neer te laten op het horizontale vlak wordt het 12 uur punt van de analemmatische zonnenuijzer gevonden. Op eenzelfde manier kunnen de overige uurpunten gevonden worden.

Het snijpunt van de zonnestraal om 12 uur en de poolstijl is een maat voor de datum. Op 21/3 en 22/9 is dit het punt B, op de datum horend bij declinatie d is dit punt C. In de loop van een dag loopt punt D over de hoepelsfeer. Hoek BDC blijft daarbij gelijk aan de declinatie d . De plaats van de schaduwgever op de analemmatische zonnenuijzer is de projectie van deze punten in het horizontale vlak, in de tekening respectievelijk de



punten A en M.
In figuur 12.3A is $AM = BE$.
BD is de straal van de hoepelsfeer en dus de lengte l van de halve lange as van de analemmatische zonnenuijzer.
Figuur 12.3B is een uitvergroot detail van figuur 12.3A.

De poolstijl maakt een hoek gelijk aan de geografische breedte b met het horizontale vlak (bedenk Poolshoogte = Hemelbreedte).
Hoek $DBC = 90^\circ$ (altijd, bij elke declinatie) en hoek $BDC = \text{decl} = d$. In driehoek BCD is $\tan(d) = BC/BD = BC/l$. Hiermee: $BC = l \cdot \tan(d)$.
In driehoek BCE is hoek $BEC = 90^\circ$ en hoek $EBC = b$.
 $\cos(b) = BE/BC$ waarmee: $BE = BC \cdot \cos(b)$.

Zodat ook hiermee gevonden wordt: $AM = BE = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b)$

ZONNEWIJZERS

De hoek Middelpunt-Brandpunt-Persoon

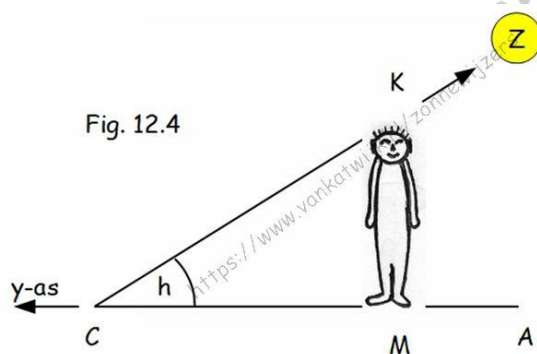
Uit voorgaande volgt dat $\tan(\text{AFM}) = \frac{AM}{AF} = \frac{l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b)}{l \cdot \cos(b)} = \tan(d)$, d.w.z.

vanuit brandpunt F wordt het lijnstuk AM gezien onder een hoek gelijk aan de declinatie.

De afstand AD, van A tot de uurpunten volgt uit wortel ($X^2 + Y^2$)

Bij welke persoonslengte komt de schaduw nog op de uurcijfers?

Om de schaduw van de persoon ook in de zomer (nog net) bij de uurcijfers op de ellips te krijgen wordt in onderstaande een formule afgeleid waarmee de lengte van de assen in dat geval kan worden berekend.



Figuur 12.4 geldt voor de (ware) middag, dus $P = 0$.

A is weer de oorsprong van het assenstelsel.

De richting van A naar C is de y-as naar het noorden.

$$AM = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b).$$

MK is de lengte van de persoon.

$$AC = Y(P) = l \cdot \sin(b) \cdot \cos(P), \text{ zodat}$$

Op de ware middag als $P = 0$ geldt: $AC = l \cdot \sin(b)$. Van bladzijde 2: $AM = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b)$ h is de hoogte van de zon boven de horizon.

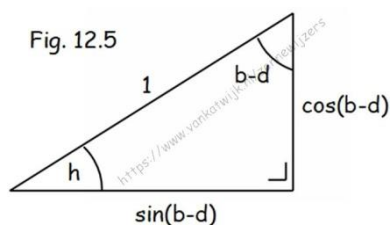
$$\tan(h) = \frac{MK}{MC}, \text{ zodat } MC = \frac{MK}{\tan(h)}$$

$$AC = AM + MC \text{ of } l \cdot \sin(b) = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b) + \frac{MK}{\tan(h)}$$

Voor de hoogte van een hemellichaam geldt:

$$\sin(h) = \sin(b) \cdot \sin(d) + \cos(b) \cdot \cos(d) \cdot \cos(P) \text{ (zie Hoofdstuk 1).}$$

Op de middag is $P = 0$, zodat hier geldt: $\sin(h) = \sin(b) \cdot \sin(d) + \cos(b) \cdot \cos(d) = \cos(b - d)$.



Uit $\sin(h) = \cos(b - d)$ volgt $\tan(h) = \frac{\cos(b-d)}{\sin(b-d)}$ zodat

$$l \cdot \sin(b) = AC = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b) + \frac{MK \cdot \sin(b-d)}{\cos(b-d)}$$

$$l \cdot \sin(b) - l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b) = \frac{MK \cdot \sin(b-d)}{\cos(b-d)}$$

$$l \cdot \left(\sin(b) - \frac{\sin(d)}{\cos(d)} \cdot \cos(b) \right) = \frac{MK \cdot \sin(b-d)}{\cos(b-d)}$$

$$\frac{l \cdot (\sin(b) \cdot \cos(d) - \sin(d) \cdot \cos(b))}{\cos(d)} = \frac{MK \cdot \sin(b-d)}{\cos(b-d)}$$

ZONNEWIJZERS

$$\frac{l \cdot \sin(b-d)}{\cos(d)} = \frac{MK \cdot \sin(b-d)}{\cos(b-d)} \text{ zodat } l = \frac{\cos(d)}{\cos(b-d)} \cdot MK$$

B.v. op een $b = 52^\circ$ N, bij een persoonslengte $MK = 1,80$ m en declinatie $= 23,5$ (21 juni) zou de halve lange as $1,88$ m en de halve korte as ($AC = l \cdot \sin(b)$) $1,48$ m moeten zijn.

Waar valt het einde van de schaduw bij gegeven b , d en P ?

Op elke willekeurige datum en tijd kan de plaats van het **einde van de schaduw** eenvoudig worden **gevonden door vanuit M** met $AM = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b)$ tegengesteld aan de richting van de zon ($WP +$ of $- 180^\circ$; zie onderstaande formule) een

afstand $MD = \frac{MK}{\tan(h)}$ (MK is de persoonslengte en de zonshoogte h te berekenen met onderstaande formule) **af te zetten**.

$\sin(h) = \sin(b) \cdot \sin(d) + \cos(b) \cdot \cos(d) \cdot \cos(P)$ (zie Hoofdstuk 1)

$\cos(T) = (\sin(d) - \sin(b) \cdot \sin(h)) / (\cos(b) \cdot \cos(h))$ (zie Hoofdstuk 1)

Dit levert een hoek T tussen 0 en 180 graden. Om de Ware Peiling te vinden geldt: $WP = T$ als $180 \leq P < 360$ en $WP = 360 - T$ als $0 \leq P < 180$

Samenvatting:

Ga uit van middelpunt A van een ellips met halve lange as $= l$ en halve korte as $= l \cdot \sin(b)$. Zet vanuit A , vanaf de richting Noord, hoeken van 15° naar links en naar rechts af; markeer de snijpunten met de ellips. Dit is hetzelfde als het markeren van de punten:

$$X(P) = l \cdot \sin(P) \text{ en } Y(P) = l \cdot \sin(b) \cdot \cos(P).$$

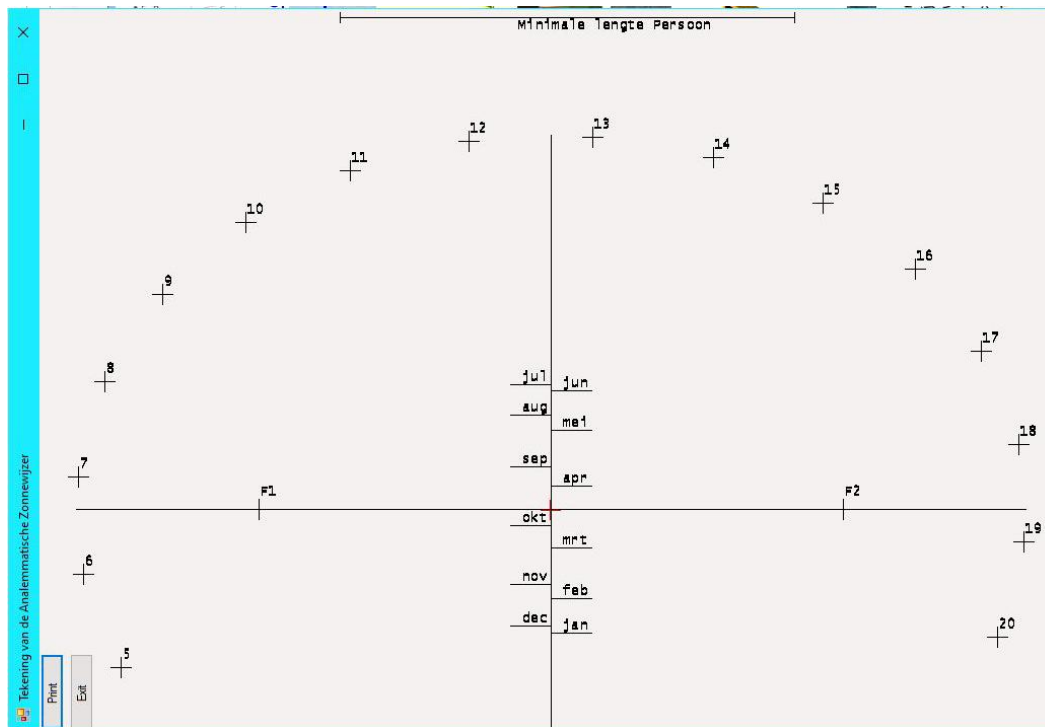
Zet vanaf A langs de korte as datumpunten op: **$AM = l \cdot \tan(d) \cdot \cos(b)$** .

De maximale halve lange as om op 21/6 bij een bepaalde lichaamse lengte de tijd af te kunnen lezen is:

$$l = \frac{\cos(23,5^\circ)}{\cos(b-23,5^\circ)} \cdot \text{persoonslengte}$$

De tekening en de tabel op de volgende bladzijde zijn gemaakt met het zonnewijzerprogramma met breedte $= 52^\circ$ lengte $= 5^\circ$ en standaardlengte $= 15^\circ$. Er dus rekening gehouden met (geografische) lengte in tijd

ZONNEWIJZERS



Onderstaand de coördinaten van de diverse punten van deze zonnewijzer

Tabel Analemmatische Zonnewijzer

Print (Lokale) Breedte: 52 (Lokale) Lengte: 5 HalveLangeAs: 180

Exit Middelpunt tot BrandPunt: 111 (Standaard) Lengte: 15 MinLengte Persoon: 172,3

Onderstaand de coördinaten van de uurpunten

Onderstaand de coördinaten van de maandpunten op de y-as (x is dus steeds nul). Deze coördinaten gelden voor de eerste van de maand.

	Tijdstip	x-coördinaat	y-coördinaat
januari	0	-47	
februari	1	-34	
maart	2	-15	
april	3	9	
mei	4	30	
juni	5	45	
juli	6	47	
augustus	7	36	
september	8	16	
oktober	9	-6	
november	10	-29	
december	11	-44	
	12	-31	140
	13	16	141
	14	62	133
	15	103	116
	16	138	91
	17	163	60
	18	177	25
	19	179	-12
	20	169	-49
	21		
	22		
	23		