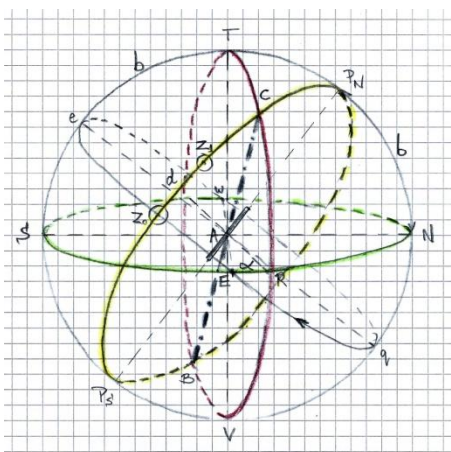
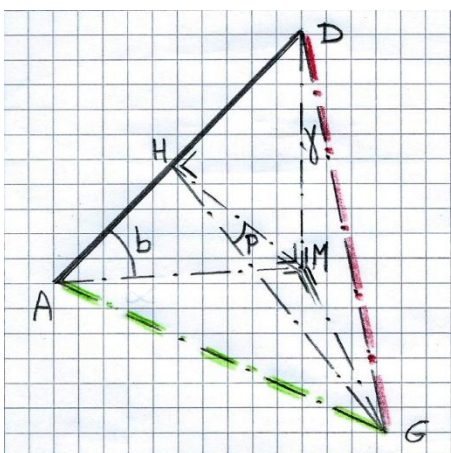


Voor afleidingen van formules voor diverse andere zonnwijzers zie: <http://www.vankatwijk.nl/zonnwijzers>



In de figuur van de hemelsfeer is A de aarde.  $Z_0$  is de zon in de ochtend als de declinatie van de zon nul is (21 maart en 21 september).  $Z_1$  is de zon op dezelfde ware tijd in de ochtend met een noordelijke declinatie (lente of zomer). Te zien is dat de schaduw van de poolstijl (evenwijdig aan, maar gezien de afstanden ook samenvallend met de aardas), ongeacht de datum op het verticale (rode) vlak langs de lijn BC valt. De uurlijnen van deze zonnwijzer zijn dus onafhankelijk van de datum (declinatie). Deze schaduwlijn is de snijlijn van het gele uurvlak  $P_N Z P_S$  met het rode verticale vlak VCT. Merk op dat dit verticale

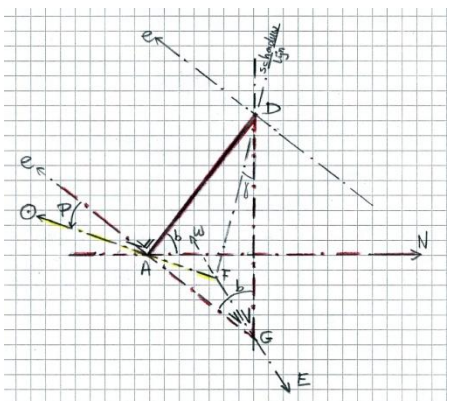
vlak een hoek  $\alpha$  maakt met het vlak door het Oost (E-) en West (W-) punt, hoek EAR =  $\alpha$ . Omdat de uurlijnen onafhankelijk zijn van de datum kan de situatie voor 21 maart en 21 september (declinatie = 0) getekend worden. Voor een eerste berekening wordt  $\alpha = 0$  genomen, d.w.z. het



verticale projectievlak is Oost-West gericht. AD is de schaduwgevende poolstijl. Vlak AGM is het horizontale vlak. Vlak GMD is een Oost-West gericht verticaal vlak. Vlak GHM staat loodrecht op de stijl. Hoek GHM is de uurhoek P.  
 $\cos(b) = \sin(90-b) = HM/DM$ ; hieruit  $DM = HM/\cos(b)$   
 $\tan(P) = MG/HM$ ; hieruit  $MG = HM \tan(P)$   
 $\tan(\gamma) = MG/DM = HM \tan(P) / (HM/\cos(b))$   
 of  **$\tan(\gamma) = \cos(b) \cdot \tan(P)$**

Hiermee zijn de uurlijnen te tekenen. Deze formule wordt gebruikt om de uurlijnen (zonder kennis van de formule) te kunnen construeren. **Voor een herleiding van Ware**

**Zonnetijd naar zomer- of wintertijd** zie de bijlage bolgonio en astro op deze website.  
**Een vergelijkbare methode om gamma te berekenen (nu met equatorvlak i.p.v. horizontaal vlak).**



Het projectievlak FGD is verticaal en Oost-West gericht. AD is de schaduwgevende poolstijl. Het rode vlak ADG is het verticale vlak in Noord-Zuid-richting en dus het meridiaanvlak van de waarnemer. Punt G ligt in het vlak van tekening. Punt F ligt aan de Westkant (achter) het vlak van tekening. Omdat lijn GF, de E-W-lijn, loodrecht staat op vlak AGD, zijn de hoeken AGF en DGF recht.  
 Hoek AGD = hoek DAN = complement van hoek ADG = breedte (b) van de waarnemer.  
 $\cos(b) = AG/DG$  zodat  $AG = DG \cdot \cos(b)$

$\tan(P) = FG/AG$  of  $\tan(P) = FG/(DG \cdot \cos(b))$  of  $FG/DG = \cos(b) \cdot \tan(P)$   
 **$\tan(\gamma) = FG/DG = \cos(b) \cdot \tan(P)$**  Hiermee zijn de uurlijnen te tekenen (zelfde als hier boven). Merk op dat bij de horizontale zonnwijzer met poolstijl de hoek waarmee de uurlijnen te tekenen zijn gevonden werd met  $\tan(\alpha) = \sin(b) \cdot \tan(P)$ . Een combinatie van deze zonnwijzers is dus goed mogelijk.

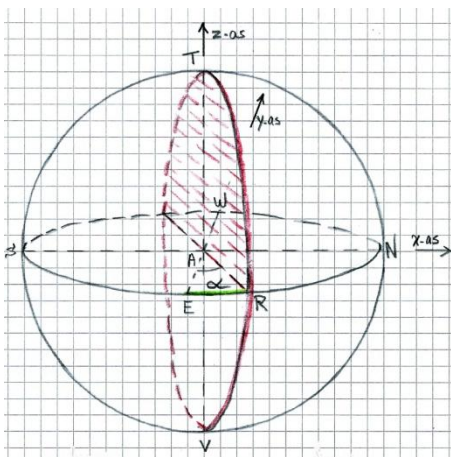
NB. Op breedte 0 (equator) is de poolstijl horizontaal (globaal poolster in de horizon) en is gamma gelijk aan de uurhoek. De poolstijl moet daar wel aan twee kanten van het schaduwvlak uitsteken om de tijd zowel bij noordelijke als zuidelijke declinatie te kunnen aflezen.

**Lengte van de schaduwlijn als de declinatie nul is**

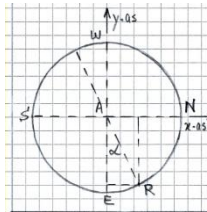
In de onderste figuur van blz. 1 is de zon in de equator (decl. = 0) getekend.

$AG = AD/\tan(b)$ ;  $FG = AG\tan(P)$ ;  $DF = FG/\sin(\text{gamma})$ ; Hiermee:  $DF = AD\tan(P)/(\tan(b)\sin(\text{gamma}))$

**Algemene situatie met verticaal vlak dat hoek alfa met het Oost-West (E-W) vlak maakt.**



XYZ assenstelsel zoals in de figuur. Alfa positief als in tekening. Het verticale vlak waarop de schaduw geprojecteerd wordt is het rode vlak ART dat een hoek alfa maakt met het Oost-West vlak AET. De poolstijl (niet getekend) valt samen met de aardas en ligt dus in het vlak ANT en maakt een hoek gelijk aan de breedte van de waarnemer met het horizontale vlak.

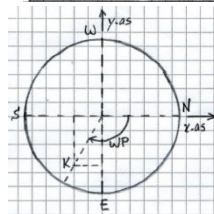
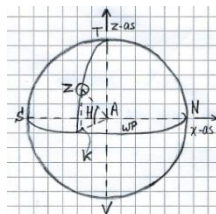
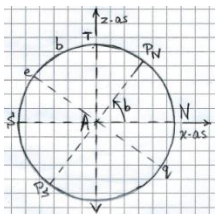


Vergelijking van vlak ART:

$X_R = \sin(\text{alfa})$ ;  $Y_R = -\cos(\text{alfa})$ ;  $Z_R = 0$ ;

$X_T = 0$ ;  $Y_T = 0$ ;  $Z_T = 1$ ; Hiermee:

vlak ART:  $k \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



$X_{P_s} = -\cos(b)$ ;  $Y_{P_s} = 0$ ;  $Z_{P_s} = -\sin(b)$ ;

$X_Z = X_K = \cos(H)\cos(WP)$ ;  $Y_Z = Y_K = -\cos(H)\sin(WP)$ ;

$Y_Z = \sin(H)$ ; Hiermee:

vlak ZAP\_s:  $m \begin{pmatrix} \cos(H)\cos(WP) \\ -\cos(H)\sin(WP) \\ \sin(H) \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -\cos(b) \\ 0 \\ -\sin(b) \end{pmatrix}$

Zie ook eerste figuur op blz. 1: De schaduwlijn is de snijlijn van de vlakken ART en ZAP\_s

**Voor deze snijlijn geldt:**

$x = m \cos(H) \cos(WP) - n \cos(b) = k \sin(\text{alfa})$  (1)

$y = -m \cos(H) \sin(WP) = -k \cos(\text{alfa})$  (2)

$z = m \sin(H) - n \sin(b) = l$  (3)

Uit (2):  $k = m \cos(H) \sin(WP) / \cos(\text{alfa})$  (4)

Uit (1) en (4):  $m \cos(H) \cos(WP) - n \cos(b) = m \cos(H) \sin(WP) \sin(\text{alfa}) / \cos(\text{alfa})$

of  $m \cos(H) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})) = n \cos(b)$

zodat  $n = m \cos(H) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})) / \cos(b)$  (5)

Uit (3) en (5):  $l = m \sin(H) - m \cos(H) \sin(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})) / \cos(b)$

zodat  $l = m (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})))$

Hiermee is een richtingsvector van de schaduwlijn:

$x = m \cos(H) \sin(WP) \sin(\text{alfa}) / \cos(\text{alfa}) = x_{ac} = m \cos(H) \sin(WP) \tan(\text{alfa})$

$y = -m \cos(H) \sin(WP) = y_{ac} = -m \cos(H) \sin(WP)$

$z = m \sin(H) - m \cos(H) \sin(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})) / \cos(b) =$

$z_{ac} = m (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})))$

**Voor berekening van H en WP** uit gegeven breedte van de waarnemer, declinatie en Ware Peiling van de zon zie "Bijlagen bolgonio en astro".

Om hoek gamma, de hoek tussen de verticaal en de schaduwlijn, makkelijker te kunnen berekenen wordt verder gewerkt met een genormeerde richtingsvector (lengte = 1).

m wordt vervangen door:  $m_1 = 1 / \sqrt{x_{ac}^2 + y_{ac}^2 + z_{ac}^2}$

De gevonden vector (AC) loopt naar "linksboven" in de figuur, daarom werken met AT en niet met AV.

Inwendig product van de vectoren AC' (genormeerd) en AT (0, 0, 1) geeft cos(gamma)

$\text{Cos}(\text{gamma}) = x'_{ac} * x_{at} + y'_{ac} * y_{at} + z'_{ac} * z_{at} = z'_{ac}$  ofwel

$$\text{Cos}(\text{gamma}) = m_1 (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})))$$

Door niet de hoek te bepalen tussen de vectoren AC' (genormeerd) en AT (0, 0, 1), maar tussen de vectoren AC' (genormeerd) en -AR (= -DR) met  $X_{AR} = \sin(\text{alfa}); Y_{AR} = -\cos(\text{alfa}); Z_{AR} = 0$  vind je:

$$\cos(90\text{-gamma}) = -m_1 \cos(H) \sin(WP) \tan(\text{alfa}) \sin(\text{alfa}) - m_1 \cos(H) \sin(WP) \cos(\text{alfa}) =$$

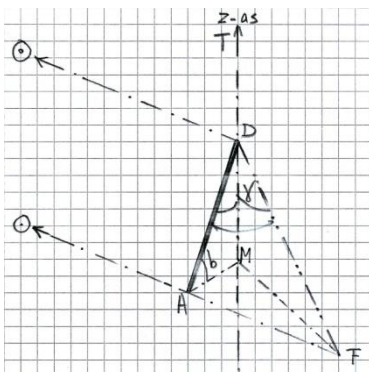
$$\cos(90\text{-gamma}) = -m_1 \cos(H) \sin(WP) (\tan(\text{alfa}) \sin(\text{alfa}) + \cos(\text{alfa})) =$$

$$\cos(90\text{-gamma}) = -m_1 \cos(H) \sin(WP) (\sin^2(\text{alfa}) + \cos^2(\text{alfa})) / \cos(\text{alfa}) =$$

$$\text{Cos}(90\text{-gamma}) = -m_1 \cos(H) \sin(WP) / \cos(\text{alfa})$$

of  $\text{Sin}(\text{gamma}) = -m_1 \cos(H) \sin(WP) / \cos(\text{alfa})$  wellicht een iets handzamere formule.

### Berekening schaduwlengthe (mede) als maat voor de datum



AD is de poolstijl; vlak DMF is het projectievlak; DF is de lengte van de schaduw, een maat voor de datum.

Hoek MDF (gamma) is de hoek die de schaduwlijn maakt met de verticaal. AD heeft tegenovergestelde richting van DA ofwel AP<sub>s</sub>.

Zie bij de bepaling van vlak ZAP<sub>s</sub> op blz. 2:

$$X_{AD} = -X_{PS} = \cos(b); Y_{AD} = -Y_{PS} = 0; Z_{AD} = -Z_{PS} = \sin(b);$$

Genormeerde richtingsvector van de schaduwlijn (zie AC op blz. 2):

$$x'_{ac} = m_1 \cos(H) \sin(WP) \tan(\text{alfa}); y'_{ac} = -m_1 \cos(H) \sin(WP);$$

$$z'_{ac} = m_1 (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\text{alfa})))$$

Hoek ADF volgt uit het inwendig product van de vectoren AC (evenwijdig aan FD) en AD.

$$\text{Hoek ADF} = \text{invcos}(x'_{ac} * x_{ad} + y'_{ac} * y_{ad} + z'_{ac} * z_{ad})$$

Zie bij de bepaling van vlak ZAP<sub>s</sub> op blz. 2:

$$X_{AZ} = \cos(H) \cos(WP); Y_{AZ} = -\cos(H) \sin(WP); Z_{AZ} = \sin(H);$$

Hoek AFD is de hoek die de schaduwlijn maakt met de richting van de zon; deze volgt uit het inwendig product van de vectoren AZ en de genormeerde richtingsvector van de schaduwlijn (zie AC op blz. 2):

Zie  $x'_{ac}$ ,  $y'_{ac}$  en  $z'_{ac}$  naast bovenstaande figuur.

Hoek AFD volgt nu uit het inwendig product van de vectoren AC ("naar linksboven") en AZ.

$$\text{Hoek AFD} = \text{invcos}(x'_{ac} * x_{az} + y'_{ac} * y_{az} + z'_{ac} * z_{az})$$

Hoek FAD = 180° - hoek ADF - hoek AFD

In driehoek AFD geldt: **schaduwlengthe = DF = AD sin(hoek FAD) / sin(hoek AFD)**

**Samengevat:** Neem een poolstijl met lengte AD in het vlak van de meridiaan die, richting noord, een hoek gelijk aan de geografische breedte maakt met het horizontale vlak. De schaduw van deze zonnwijzer valt op een **oost-west gericht verticaal vlak**. Als gamma de hoek is vanaf de voet van de poolstijl die de schaduwlijn maakt met de verticaal door deze voet, dan is

$$\tan(\gamma) = \cos(b) \cdot \tan(P); \text{ Hiermee zijn de uurlijnen te tekenen.}$$

Als declinatie=0 dan is de schaduw lengte op het Oost-West vlak:  $DF = AD \tan(P) / (\tan(b) \sin(\gamma))$

**Algemene situatie met verticaal vlak dat hoek alfa met het Oost-West (E-W) vlak maakt.**

Hoek gamma is de hoek vanaf de voet van de poolstijl die de schaduwlijn maakt met de verticaal door deze voet.

1.  $\cos(\gamma) = m_1 (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\alpha)))$  met

$$x_{ac} = \cos(H) \sin(WP) \tan(\alpha), y_{ac} = -\cos(H) \sin(WP), z_{ac} = (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\alpha)))$$

$$m_1 = 1 / \sqrt{x_{ac}^2 + y_{ac}^2 + z_{ac}^2}, \text{ waarna}$$

$$\sin(H) = \sin(b) \sin(d) + \cos(b) \cos(d) \cos(P)$$

$$\cos(T) = (\sin(d) - \sin(b) \sin(H)) / (\cos(b) \cos(H))$$

Dit levert een hoek T tussen 0 en 180 graden. Om de Ware Peiling te vinden geldt:

$$WP = T \text{ als } 180 \leq P < 360 \text{ en } WP = 360 - T \text{ als } 0 \leq P < 180$$

2.  $\sin(\gamma) = -m_1 \cos(H) \sin(WP) / \cos(\alpha)$

**schaduw lengte = DF = AD sin(hoek FAD) / sin(hoek AFD) met**

AD is de lengte van de poolstijl

$$X_{AZ} = \cos(H) \cos(WP); \quad Y_{AZ} = -\cos(H) \sin(WP); \quad Y_{AZ} = \sin(H); \quad (\text{lengte} = 1)$$

$$X_{AD} = -X_{PS} = \cos(b); \quad Y_{AD} = -Y_{PS} = 0; \quad Z_{AD} = -Z_{PS} = \sin(b) \quad (\text{lengte} = 1)$$

$$x'_{ac} = m_1 \cos(H) \sin(WP) \tan(\alpha), y'_{ac} = -m_1 \cos(H) \sin(WP), z'_{ac} = m_1 (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\alpha)))$$

voor  $m_1$  zie bij 1. berekening van gamma

Hoek FAD =  $180^\circ$  - hoek ADF - hoek AFD waarbij:

$$\text{Hoek ADF} = \arccos(x'_{ac} \cdot X_{ad} + y'_{ac} \cdot Y_{ad} + z'_{ac} \cdot Z_{ad})$$

$$\text{Hoek AFD} = \arccos(x'_{ac} \cdot X_{az} + y'_{ac} \cdot Y_{az} + z'_{ac} \cdot Z_{az})$$

Onderstaand een invulling van de formules voor drie verschillende declinaties (data), links voor een Oost-West vlak, overigens voor een vlak dat een hoek van 25 graden maakt met dit vlak.

Linksonder de schaduw lengte als  $\alpha = 0$  (Oost-West vlak) en de zons declinatie = 0

verticale zonnewijzer met poolstijl

Staaf lengte AD = 100

alfa = 25

0.4363323

oost-west vlak		$\tan(\gamma) = \cos(b) \cdot \tan(P)$			$\cos(\gamma) = m \cdot (\sin(H) - \cos(H) \tan(b) (\cos(WP) - \sin(WP) \tan(\alpha)))$			
alfa = 0		gamma			$\sin(\gamma) = -m \cos(H) \sin(WP) / \cos(\alpha)$			
52	b = 0.9076	schaduwl.	radialen	graden	radialen	graden	radialen	graden
-23.5	d = -0.4102	83.6312	0.3415	19.5679	0.4619	26.4645	0.461893	26.464516
0	0.0000		0.3415	19.5679	0.4619	26.4645	0.461893	26.464516
10	0.1745		0.3415	19.5679	0.4619	26.4645	0.461893	26.464516
30	P = 0.5236							

Hoogte	WP	Xac	Yac	Zac	m1	X'ac	Y'ac	Z'ac	Hoek ADF	Hoek AFD	Hoek FAD
0.1756	3.62601	-0.2138	0.4585	1.0163	0.8808	-0.1883	0.4039	0.8952	0.9403769	1.0405718	1.160644
0.5624	3.77391	-0.2332	0.5000	1.1082	0.8078	-0.1883	0.4039	0.8952	0.9403769	0.6304195	1.5707963
0.7234	3.85830	-0.2296	0.4924	1.0914	0.8202	-0.1883	0.4039	0.8952	0.9403769	0.4558865	1.7453293

Bij alfa=0 en decl.=0

DF=AD\*tan(P)/(tan(b)\*sin(gamma))

DF= 134.6802

Xaz	Yaz	Zaz
-0.8713	0.4585	0.1747
-0.6824	0.5000	0.5332
-0.5652	0.4924	0.6619

Xad	Yad	Zad
0.6157	0.0000	0.7880108
0.6157	0.0000	0.7880108
0.6157	0.0000	0.7880108

DF
106.3019
169.6400
223.6885