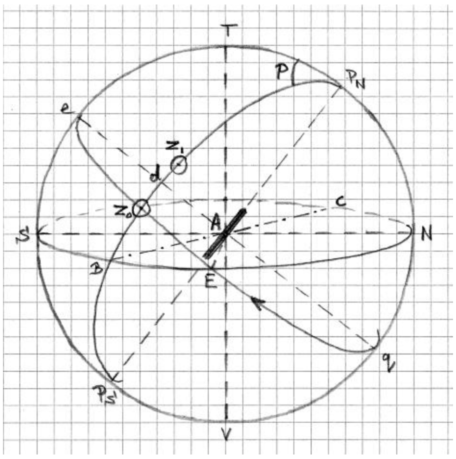
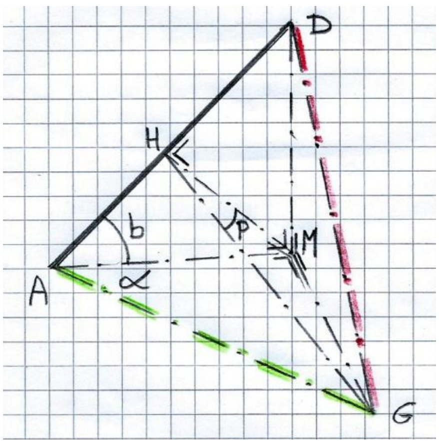
Voor afleidingen van formules voor diverse andere zonnewijzers zie: http://www.vankatwijk.nl/zonnewijzers



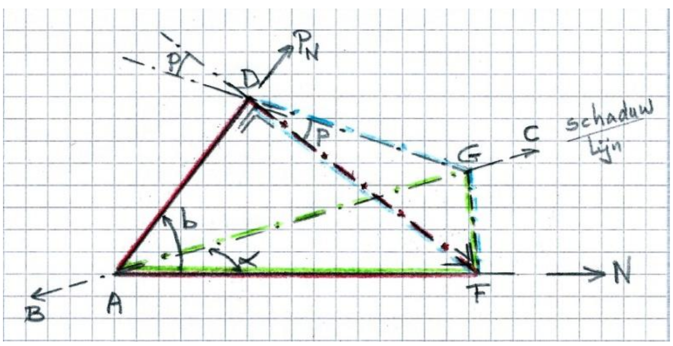
In de figuur van de hemelsfeer is A de aarde. Z_0 is de zon in de ochtend als de declinatie van de zon nul is (21 maart en 21 september). Z_1 is de zon op dezelfde ware tijd in de ochtend met een noordelijke declinatie (lente of zomer).
Te zien is dat de schaduw van de poolstijl (evenwijdig aan, maar gezien de afstanden ook samenvallend met de aardas), ongeacht de datum op het horizontale vlak langs de lijn BC valt.
Dit is de snijlijn van het uurvlak $P_N Z_0 P_S$ met het horizontale vlak NES. De uurlijnen van deze zonnewijzer zijn dus onafhankelijk van de datum (declinatie).Omdat de uurlijnen onafhankelijk zijn van de datum kan de situatie voor 21 maart en 21 september (declinatie = 0) getekend worden.

Een methode om alfa te berekenen (zie ook 2^e^, 3^e^ en 4^e^ methode)



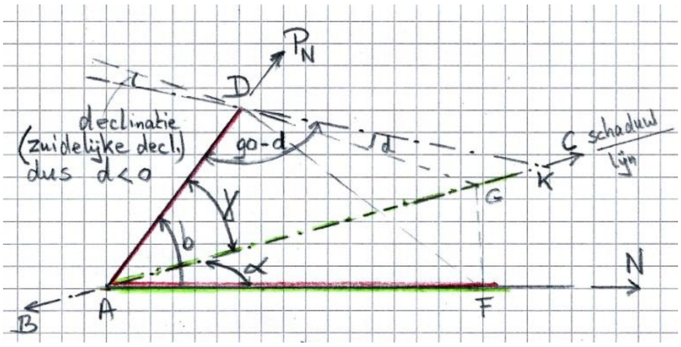
AM is de Zuid-Noord lijn. AD is de schaduwgevende poolstijl.
Vlak AGM is het horizontale vlak.
Vlak GMD is een Oost-West gericht verticaal vlak.
Vlak GHM staat loodrecht op de poolstijl.
Hoek GHM is de uurhoek P.
sin(b) = MH/AM, hieruit AM = MH/sin(b)
tan(P) = GM/MH, hieruit GM = MH tan(P)
tan(alfa) = GM/AM = MH tan(P) / (MH/sin(b))
of: **tan(alfa) = sin(b)*tan(P)** Hiermee zijn de **uurlijnen** te tekenen.
Deze formule wordt gebruikt om de uurlijnen (zonder kennis van de formule) te kunnen construeren. **Voor een herleiding van Ware Zonnetijd naar zomer-of wintertijd** zie de bijlage bolgonio en astro op deze website.

Een tweede methode om alfa te berekenen (nu met equatorvlak i.p.v. verticaalvlak)

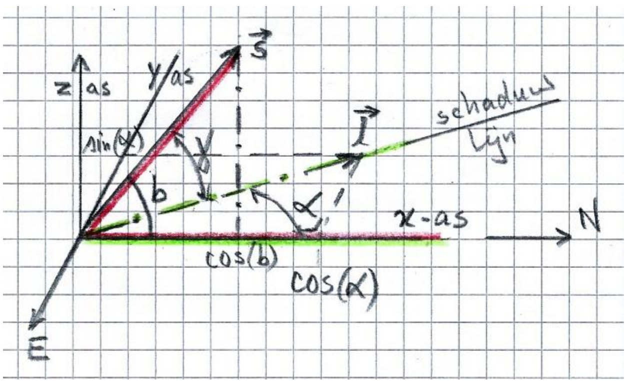


Bij de eerste methode is het middag, in deze tekening is het ochtend. AD is de schaduwgevende poolstijl. Vlak AFG (groen) is het horizontale vlak. Vlak DFG (blauw) staat loodrecht op de poolstijl (is dus evenwijdig aan het equatorvlak). Vlak ADF (rood) is het (verticale, dus loodrecht op vlak AFG) meridiaanvlak van de waarnemer.
Omdat vlak AFD loodrecht vlak AFG en vlak DFG loodrecht AD zijn de hoeken AFG en DFG recht.
sin(b) = DF/AF zodat DF = AF*sin(b); tan(P) = FG/DF of tan(P) = FG/(AF*sin(b))
tan(alfa) = FG/AF of FG = AF*tan(alfa) Hiermee: tan(P)=AF*tan(alfa)/(AF*sin(b))=tan(alfa)/sin(b)
zodat **tan(alfa) = sin(b)*tan(P)** ; Merk op dat bij de verticale zonnewijzer met poolstijl de hoek waarmee de uurlijnen te tekenen zijn gevonden werd met tan(gamma) = cos(b)*tan(P). Een combinatie van deze zonnewijzers is dus goed mogelijk.

De lengte van de schaduwlijn is een maat voor de datum.



Het groene vlak is weer horizontaal, het rode vlak verticaal. Het is ochtend.
In driehoek AKD geldt:
AK / sin(90-d) = AD / sin(hoek AKD)
of AK = AD*cos(d) / sin(hoek AKD)
hoek AKD = 180 – (90 - d) – gamma =
90 + d - gamma



Om gamma te bepalen maken we genormeerde vectoren s en l in een xyz assenstelsel als in de figuur met cördinaten

$$s = \begin{pmatrix} \cos(b) \\ 0 \\ \sin(b) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad l = \begin{pmatrix} \cos(alfa) \\ \sin(alfa) \\ 0 \end{pmatrix}$$

(s is de poolstijl met lengte 1)
gamma is de hoek tussen deze vectoren

M.b.v. inwendig product van s en l:

cos(gamma) = cos(b)*cos(alfa) + 0*sin(alfa) + sin(b)*0 = cos(b)*cos(alfa)

of **gamma** = invcos(cos(b)*cos(alfa))

Hiermee: hoek AKD = 90 + d – gamma = 90 + d – invcos(cos(b)*cos(alfa))

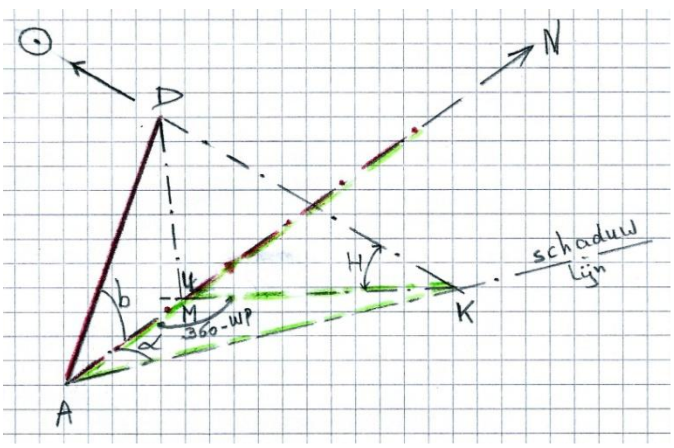
Bovenaan deze blz. gevonden: AK = AD*cos(d) / sin(hoek AKD)

Zodat de schaduwlengte AK = AD*cos(d) / sin(90 + d – invcos(cos(b)*cos(alfa)))

= AD*cos(d) / sin(90 – (invcos(cos(b)*cos(alfa)) - d) = AD*cos(d) / cos(invcos(cos(b)*cos(alfa))-d)

Of schaduwlengte **AK = AD*cos(d) / cos(invcos(cos(b)*cos(invtan(sin(b)*tan(P)))) – d)**

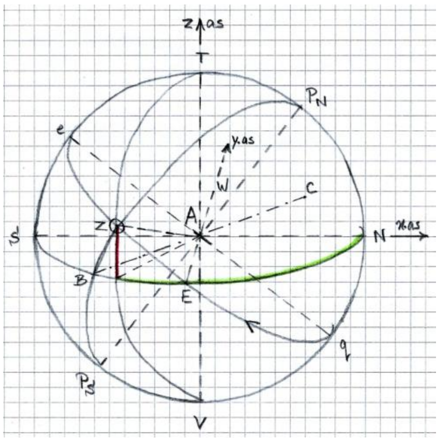
Een derde methode



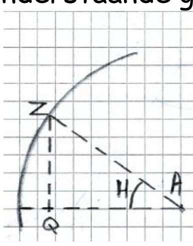
In de figuur is de zon 's middags getekend.
Het groene vlak is weer het horizontale vlak, het rode vlak is het verticale vlak. Vanuit D loodrecht naar beneden geeft punt M. Nu is hoek MKD de hoogte (H) van de zon boven de horizon en de hoek tussen de noordrichting (verlengde van AM) en het verlengde van de lijn KM de Ware Peiling (WP) of azimut. In "Bijlagen gonio en astro" zijn de onderstaande formules voor H en T (WP) uitgelegd.

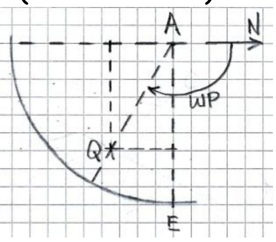
DM = AD*sin(b); **MK** = DM/tan(H) = AD*sin(b)/tan(H); **AM** = AD*cos(b).
H is te berekenen met de formule sin(H) = sin(b)*sin(d) + cos(b)*cos(d)*cos(P)
WP is te berekenen met cos(T) = (sin(d) – sin(b)*sin(H))/(cos(b)*cos(H)) waarna
WP = T als 180 <= P <= 360 en WP 360 – T als 0 <= P < 180. Daarna hoek AMK = 360°-WP
De lengte van de schaduw (**AK**) is te berekenen met AK^2 = AM^2 + MK^2 -2*AM*MK*cos(hoek AMK)
Hoek **alfa** volgt uit sin(alfa) = MK*sin(hoek AMK)/AK

Een vierde methode om alfa en de schaduwlengte te berekenen



xyz assenstelsel; Oorsprong is A; richting AN is de positieve x-as, richting AW (naar West) is de positieve y-as en richting AT is de positieve z-as. De groene boog is de Ware Peiling WP, de rode boog is de hoogte H. De tekening is voor zonsdeclinatie = 0, maar onderstaande geldt (zie ook blz. 1) voor elke declinatie.





Straal = 1, AQ = cos(H).
Vector AZ:
X_{AZ} = cos(WP)*cos(H)
Y_{AZ} = -sin(WP)*cos(H)
Z_{AZ} = sin(H)

Lijn BC, de lijn waar langs de schaduw valt, is de snijlijn van vlak P_NZP_S (de uurcirkel over de zon) en vlak NES (het horizontale vlak).
Vector AP_N: X_{AP} = cos(b), Y_{AP} = 0, Z_{AP} = sin(b); Uit AZ en AP_N volgt de vergelijking van vlak P_NZP_S.
Vector AN: X_{AN} = 1, Y_{AN} = 0, Z_{AN} = 0; Vector AW: X_{AW} = 0, Y_{AW} = 1, Z_{AW} = 0; Hiermee vlak NES.

$$\text{vlak } P_NZP_S:\ k\begin{pmatrix}\cos(WP)\cos(H)\\ -\sin(WP)\cos(H)\\ \sin(H)\end{pmatrix}+l\begin{pmatrix}\cos(b)\\ 0\\ \sin(b)\end{pmatrix} \qquad \text{vlak NES}:\ m\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

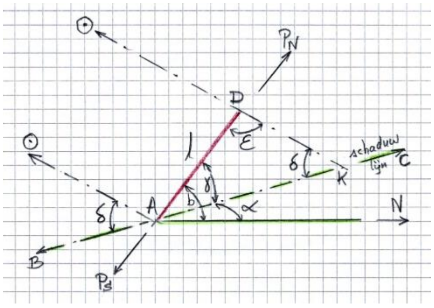
Voor de snijlijn BC geldt:
x = k cos(WP) cos(H) + l cos(b) = m (1)
y = -k sin(WP) cos(H) = n (2)
z = k sin(H) + l sin(b) = 0 (3)
Uit (3): l sin(b) = -k sin(H) -> l = -k sin(H)/sin(b)
Hieruit en uit (1): m = k cos(WP) cos(H) –k sin(H) cos(b)/sin(b) = k (cos(WP) cos(H) –sin(H)/tan(b))

Zodat: x_{BC} = k (cos(WP) cos(H) – sin(H)/tan(b))
y_{BC} = -k sin(WP) cos(H)
z_{BC} = 0
Na controle blijkt echter dat
x_{BC} = k (cos(WP) cos(H) + sin(H)/tan(b)) ???

Alfa is de hoek tussen de lijnen AN en BC. Vector AN heeft de lengte 1, de vector vanaf A langs BC kan genormeerd worden door te werken met k_1 = 1/wortel(x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2).
Nu geldt cos(alfa) = x'_{AC} * 1 (+0), waaruit **alfa = invcos(x'_{AC})**.

Berekening van de schaduwlengte (maat voor de datum)

Dit kan met gegeven alfa op de manier van blz. 1 en 2, maar ook voortbordurend op bovenstaande.



Hoek AKD is de hoek tussen AZ en AB.

x_{AZ} = cos(WP)*cos(H), y_{AZ} = -sin(WP)*cos(H), z_{AZ} = sin(H) (zie blz.3)

(vectorlengte AZ is 1)

x_{BC} = k_1(cos(WP)cos(H)+sin(H)/tan(b)), y_{BC} = -$k_1$sin(WP)cos(H), z_{BC}=0

Vector AB is tegengesteld aan BC, zodat

$x_{AB'}$=k_1(cos(WP)cos(H)+sin(H)/tan(b)), $y_{AB'}$=-$k_1$sin(WP)cos(H), $z_{AB'}$=0

(vectorlengte AB' is 1)

Hiermee **hoek AKD** = invcos(x_{AZ} * $x_{AB'}$ + y_{AZ} * $y_{AB'}$ (+ 0))

Hoek ADK is de hoek tussen ZA en AP_S.

x_{ZA} = -cos(WP)*cos(H), y_{ZA} = sin(WP)*cos(H), z_{ZA} = -sin(H) (vergelijk met AZ in bovenstaande)

(vectorlengte AZ is 1)

x_{AP_s} = -cos(b), y_{AP_s} = 0, z_{AP_s} = -sin(b); (vectorlengte AP_S is 1)

Hiermee **hoek ADK** = invcos(x_{ZA} * x_{AP_s} + y_{ZA} * y_{AP_s} + z_{ZA} * z_{AP_s})

Nu is schaduwlengte = **AK = AD * sin(hoek ADK) / sin(hoek AKD)**

Samengevat: Neem een poolstijl met lengte AD in het vlak van de meridiaan die, richting noord, een hoek gelijk aan de geografische breedte maakt met het horizontale vlak.

1^e en 2^e methode: tan(alfa) = sin(b)*tan(P)

alfa is de hoek vanaf de voet van de poolstijl die de schaduwlijn maakt met de noordrichting.

Hiermee zijn de uurlijnen te tekenen.

NB. Op breedte 0 (equator) moet de formule voor de polaire zonnewijzer gebruikt worden.

2^e methode: schaduwlengte = AK = AD*cos(d) / cos(invcos(cos(b)*cos(alfa))-d)

of: **AK** = AD*cos(d) / cos(invcos(cos(b)*cos(invtan(sin(b)*tan(P)))) – d)

3^e methode: schaduwlengte = AK = sqrt(AM^2 + MK^2 -2*AM*MK*cos(WP))

met **AM** = AD*cos(b) en **MK** = AD*sin(b)/tan(H).

Hoek **alfa** volgt uit sin(alfa) = MK*sin(360 – WP)/AK

4^e methode: x_{BC} = k (cos(WP) cos(H) – sin(H)/tan(b)), y_{BC} = -k sin(WP) cos(H), z_{BC} = 0

k_1 = 1/wortel(x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2), hiermee: $x'_{AC'}$ = k_1 * x_{BC} waarna

alfa = invcos($x'_{AC'}$) en **AK = AD * sin(hoek ADK) / sin(hoek AKD)** met

hoek ADK=invcos(x_{ZA} * x_{AP_s} + y_{ZA} * y_{AP_s} + z_{ZA} * z_{AP_s}) **en** hoek AKD=invcos(x_{AZ} * $x_{AB'}$ + y_{AZ} * $y_{AB'}$ (+ 0))

x_{AP_s} = -cos(b), y_{AP_s} = 0, z_{AP_s} = -sin(b); (vectorlengte AP_S is 1)

x_{ZA} = -cos(WP)*cos(H), y_{ZA} = sin(WP)*cos(H), z_{ZA} = -sin(H)

Voor de 3^e en de 4^e methode moeten de hoogte H en de ware peiling WP berekend worden:

H is te berekenen met de formule sin(H) = sin(b)*sin(d) + cos(b)*cos(d)*cos(P)

WP is te berekenen met cos(T) = (sin(d) – sin(b)*sin(H))/(cos(b)*cos(H)) waarna

WP = T als 180 <= P <= 360 en WP 360 – T als 0 <= P < 180.

Horizontale zonnewijzer met poolstijl

Eerste en tweede methode

Schaduwlengte AK volgens de 2e methode

AK=AD*cos(d)/cos(invcos(cos(b)*cos(alfa))-d)

tan(alfa) = sin(b)*tan(P)

AD Staaflengte		100	**alfa**	**AK**
52	**b =**	0,907571		
-15	**d =**	-0,2618	0,75401	477,7002
0		0	0,75401	222,8232
23		0,401426	0,75401	120,7564
50	**P =**	0,872665		

<u>Voorbeeld berekeningen met drie verschillende declinaties</u>

Hoeken in radialen

Derde methode

AK = sqrt(AM^2 + MK^2 -2*AM*MK*cos(WP))

sin(**alfa**) = MK*sin(360 – WP)/AK

Hoogte	**WP**	**AM**	**MK**	**AK^2**	**AK**	**alfa**
0,179261	3,992672	61,56615	434,8687	228197,4	477,7002	0,754009944
0,406873	4,128167	61,56615	182,8677	49650,2	222,8232	0,754009944
0,73715	4,402619	61,56615	86,79709	14582,11	120,7564	0,754009944

Vierde methode

	x	y	z
BC	-0,78791	0,739942	0
	-0,81571	0,766044	0
	-0,75086	0,705148	0
AN	1	0	0
ZA	0,648609	-0,73994	-0,1783
	0,506524	-0,76604	-0,39574
	0,225699	-0,70515	-0,67218
AP	-0,61566	0	-0,78801

BC genormeerd

k1 =	x	y	z	ADK	AKD
0,925163	-0,72895	0,684567303	0	1,832596	0,203607
0,893639	-0,72895	0,684567303	0	1,570796	0,465407
0,970814	-0,72895	0,684567303	0	1,169371	0,866832

AK	**alfa**
477,7002	0,75401
222,8232	0,75401
120,7564	0,75401

$\mathbf{x}_{BC}$ = k (cos(WP) cos(H) – sin(H)/tan(b)), $\mathbf{y}_{BC}$ = -k sin(WP) cos(H), $\mathbf{z}_{BC}$ = 0

$\mathbf{k}_1$ = 1/wortel(x_{BC}^2 + y_{BC}^2 + z_{BC}^2), hiermee: $\mathbf{x'}_{AC'}$ = k_1 * x_{BC} waarna

alfa = invcos(-x'AC') en **AK** = AD * sin(hoek ADK) / sin(hoek AKD) met

hoek ADK = invcos(x_{ZA} * x_{AP_s} + y_{ZA} * y_{AP_s} + z_{ZA} * z_{AP_s}) **en**

hoek AKD = invcos(xAZ * xAB' + yAZ * yAB' (+ 0))

$\mathbf{x}_{AP_s}$ = -cos(b), $\mathbf{y}_{AP_s}$ = 0, $\mathbf{z}_{AP_s}$ = -sin(b); (vectorlengte AP_s is 1)

$\mathbf{x}_{ZA}$ = -cos(WP)*cos(H), $\mathbf{y}_{ZA}$ = sin(WP)*cos(H), $\mathbf{z}_{ZA}$ = -sin(H)