

ZONNEWIJZERS

Hoofdstuk 9 De Bifilaire Zonnewijzer.

Inhoud:

Inleiding	blz. 9.1
Constructie	blz. 9.1
Algemene formules	blz. 9.2
Formule voor x_1 uitgedrukt in h_1 en T	blz. 9.2
Formule voor y_1 uitgedrukt in h en T	blz. 9.2
Formule voor x uitgedrukt in breedte b , declinatie (d) en uurhoek (P) van de zon	blz. 9.3
Formule voor y uitgedrukt in breedte (b), declinatie (d) en uurhoek (P) van de zon	blz. 9.3
Uurlijnen zijn bij deze zonnewijzer altijd rechte lijnen	blz. 9.4
Uurlijnen (om het uur, dus om de 15°) maken onderling hoeken van 15°	blz. 9.5
De bifilaire zonnewijzer als het zonnewijzervlak niet horizontaal is	blz. 9.6
De bifilaire zonnewijzer kan dus ook getekend worden met de Uniforme Methode	blz. 9.7

Inleiding.

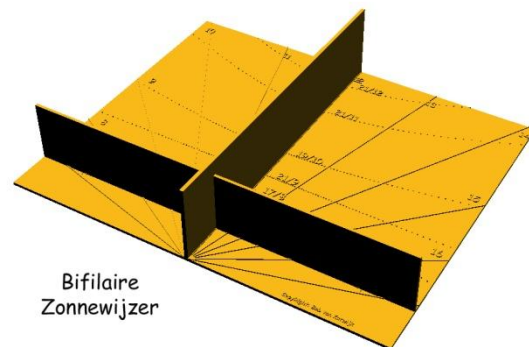
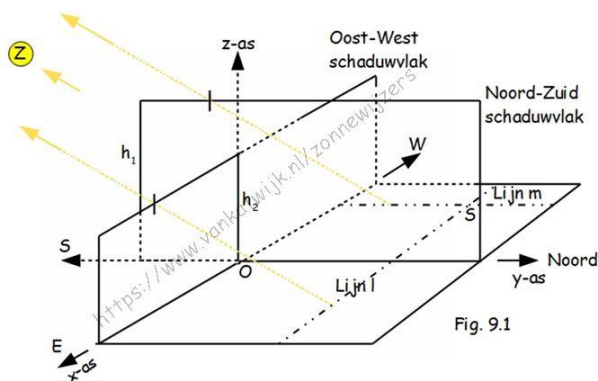
Het principe van de bifilaire of tweedraads zonnewijzer is rond 1923 bedacht door de Duitser Hugo Michnik. Diverse informatie over de zonnewijzer is te vinden op https://en.wikipedia.org/wiki/Bifilar_sundial.

Constructie

De zonnewijzer bestaat uit twee loodrecht op elkaar staande vlakken of draden. Men kiest de x -as in de richting Oost (E), samenvallend met het Oost-West schaduwgevend vlak. De y -as is in de richting Noord, samenvallend met het Noord-Zuid schaduwgevend vlak. De z -as is vertikaal (rechtsdraaiend assenstelsel).

De schaduwdraad in N-S richting kiest men op hoogte h_1 , de schaduwdraad in E-W richting op hoogte h_2 . Deze schaduwdraden kunnen ook de bovenkanten van vlakken zijn. Het bijzondere van deze (horizontale) zonnewijzer is dat met $h_2 = h_1 \cdot \sin(b)$ (b is de geografische breedte van de standplaats), de uurlijnen in het horizontale vlak een onderlinge hoek van 15° met elkaar maken. Het snijpunt van deze uurlijnen ligt in dat geval op $y = -h_1 \cdot \cos(b)$ (zie blz. 5)

ZONNEWIJZERS



Het voorbeeld rechts is gemaakt met $h_2 = h_1 \cdot \sin(b)$. Het bijzondere van deze zonnewijzer is dus dat de uurlijnen op het horizontale vlak onderling een hoek van 15° met elkaar maken. Het is gemaakt in OpenSCAD en kan met een 3D-printer geprint worden.

In de figuur 9.1 is de situatie 's ochtends geschetst. Het Oost-West vlak geeft schaduwlijn l van het zonlicht, het Noord-Zuid vlak geeft schaduwlijn m. Tijd en datum kunnen bij punt S(x1,y1) worden afgelezen.

De coördinaten x_1 en y_1 van punt S zijn bij gegeven hoogte h_1 van de N-S draad, hoogte h_2 van de E-W draad, geografische breedte b , uurhoek P en declinatie d van de zon te berekenen met de op de volgende bladzijden afgeleide formules uit de genoemde Engelstalige Wikipedia pagina.

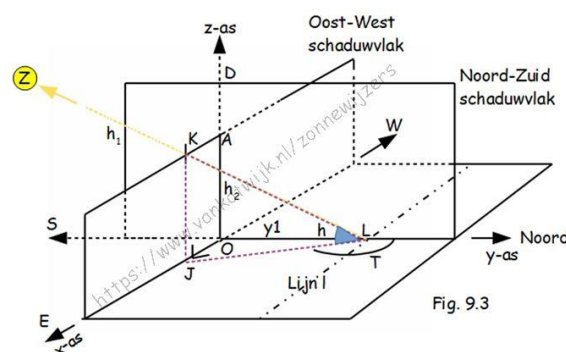
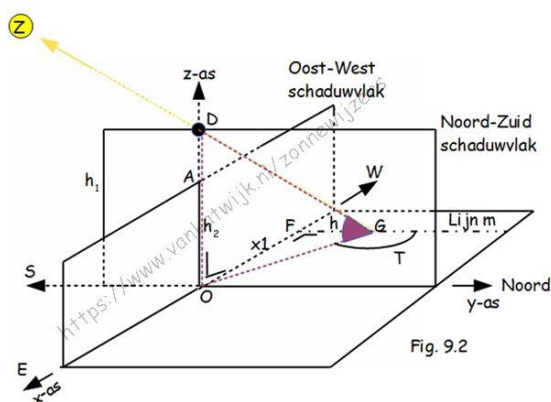
$$x_1 = h_1 \cdot \frac{\sin(P)}{\sin(b) \cdot \tan(d) + \cos(b) \cdot \cos(P)}$$

$$y_1 = h_2 \cdot \frac{\sin(b) \cdot \cos(P) - \cos(b) \cdot \tan(d)}{\sin(b) \cdot \tan(d) + \cos(b) \cdot \cos(P)}$$

Dit zijn de **algemene formules** voor de bifilaire zonnewijzer.

Bewijs op blz. 3 (x_1) en blz. 4 (y_1).

Formules voor x_1 en y_1 uitgedrukt in hoogte (h) en azimut (T) van de zon.



Formule voor x_1 uitgedrukt in h_1 en T

In $\triangle OGD$: $\tan(h) = \frac{h_1}{OG}$ zodat $OG = \frac{h_1}{\tan(h)}$ (1)

Formule voor y_1 uitgedrukt in h en T

In $\triangle LJK$: $\tan(h) = \frac{h_2}{JL}$, zodat $JL = \frac{h_2}{\tan(h)}$ (3)

ZONNEWIJZERS

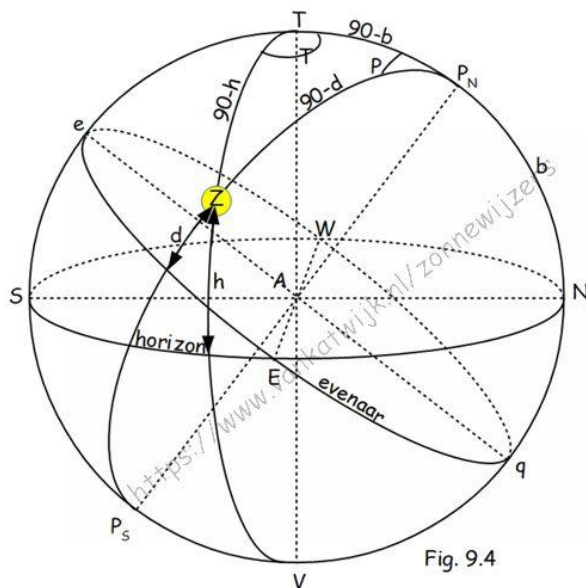
In $\triangle OGF$: $\sin(180^\circ - T) = \frac{x_1}{OG}$, of:
 $x_1 = OG \cdot \sin(T)$ (2)

In $\triangle LOJ$: $\cos(180^\circ - T) = \frac{y_1}{JL}$, of
 $y_1 = -JL \cdot \cos(T)$ (4)

Uit (1) en (2): $x_1 = h_1 \cdot \frac{\sin(T)}{\tan(h)}$

Uit (3) en (4): $y_1 = -h_2 \cdot \frac{\cos(T)}{\tan(h)}$

Formule voor x uitgedrukt in breedte b, declinatie (d) en uurhoek (P) van de zon.
 (Zie Hoofdstuk 1 voor de bolgoniometrie formules).



Toepassen van de sinusregel in de **parallactische driehoek P_NTZ** (zie figuur 9.4) geeft:

$$\frac{\sin(T)}{\sin(90^\circ - d)} = \frac{\sin(P)}{\sin(90^\circ - h)} \text{ of:}$$

$$\frac{\sin(T)}{\cos(d)} = \frac{\sin(P)}{\cos(h)}$$

zodat: $\sin(T) = \frac{\cos(d) \cdot \sin(P)}{\cos(h)}$

Hiermee: $x_1 = h_1 \cdot \frac{\frac{\cos(d) \cdot \sin(P)}{\cos(h)}}{\frac{\sin(h)}{\cos(h)}} =$

of: $x_1 = h_1 \cdot \frac{\cos(d) \cdot \sin(P)}{\sin(h)}$ (5)

De cosinusregel in de parallactische driehoek geeft:

$$\sin(h) = \sin(b) \cdot \sin(d) + \cos(b) \cdot \cos(d) \cdot \cos(P)$$

Invullen in (5): $x_1 = h_1 \cdot \frac{\cos(d) \cdot \sin(P)}{\sin(b) \cdot \sin(d) + \cos(b) \cdot \cos(d) \cdot \cos(P)}$

$$x_1 = h_1 \cdot \frac{\sin(P)}{\sin(b) \cdot \tan(d) + \cos(b) \cdot \cos(P)}$$

Formule voor y uitgedrukt in breedte (b), declinatie (d) en uurhoek (P) van de zon.

Twee keer de cotangensregel toepassen (zie sfeerfiguur op de vorige bladzijde).

$$\cotan(90^\circ - h) \cdot \sin(90^\circ - b) = \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(T) + \sin(T) \cdot \cotan(P) \text{ of}$$

$$\tan(h) \cdot \cos(b) = \sin(b) \cdot \cos(T) + \sin(T) \cdot \cotan(P) \text{ zodat}$$

$$\tan(h) = \frac{\sin(b) \cdot \cos(T) + \sin(T) \cdot \cotan(P)}{\cos(b)} \quad (1)$$

$$\cotan(90^\circ - d) \cdot \sin(90^\circ - b) = \cos(90^\circ - b) \cdot \cos(P) + \sin(P) \cdot \cotan(T) \text{ of}$$

ZONNEWIJZERS

$$\tan(d) * \cos(b) = \sin(b) * \cos(P) + \sin(P) * \cotan(T) \text{ zodat}$$

$$\tan(d) * \cos(b) - \sin(b) * \cos(P) = \sin(P) * \cotan(T) \text{ waarmee}$$

$$\cotan(T) = \frac{\tan(d) * \cos(b) - \sin(b) * \cos(P)}{\sin(P)}; \text{ ofwel:}$$

$$\tan(T) = \frac{\sin(P)}{\cos(b) * \tan(d) - \sin(b) * \cos(P)} \quad (2)$$

$$\text{Uitgedrukt in h en T vonden we (zie blz. 3) } y1 = -h2 * \frac{\cos(T)}{\tan(h)}.$$

Hierin formule (1) invullen geeft:

$$y1 = -h2 * \frac{\cos(T)}{\frac{\sin(b) * \cos(T) + \sin(T) * \cotan(P)}{\cos(b)}} \quad \text{of} \quad y1 = -h2 * \frac{\cos(b)}{\sin(b) + \tan(T) * \cotan(P)}$$

Hierin formule (2) invullen geeft:

$$y1 = -h2 * \frac{\cos(b)}{\sin(b) + \frac{\sin(P)}{\cos(b) * \tan(d) - \sin(b) * \cos(P)} * \frac{\cos(P)}{\sin(P)}} \quad \text{of}$$

$$y1 = -h2 * \frac{\cos(b)}{\frac{\sin(b) * \cos(b) * \tan(d) - (\sin(b))^2 * \cos(P) + \cos(P)}{\cos(b) * \tan(d) - \sin(b) * \cos(P)}} \quad \text{zodat}$$

$$y1 = -h2 * \cos(b) * \frac{\cos(b) * \tan(d) - \sin(b) * \cos(P)}{\sin(b) * \cos(b) * \tan(d) - (\sin(b))^2 * \cos(P) + \cos(P)}$$

$$y1 = -h2 * \frac{(\cos(b))^2 * \tan(d) - \sin(b) * \cos(b) * \cos(P)}{\sin(b) * \cos(b) * \tan(d) + (\cos(b))^2 * \cos(P)};$$

dit geeft (delen door $\cos(b)$) de gevraagde formule:

$$y1 = h2 * \frac{\sin(b) * \cos(P) - \cos(b) * \tan(d)}{\sin(b) * \tan(d) + \cos(b) * \cos(P)}$$

Op eenzelfde plaats en tijd zijn breedte b en uurhoek P constant.

Door de relatie tussen x1 en y1 te bepalen kan aangetoond worden **dat de uurlijnen bij deze zonnewijzer altijd rechte lijnen zijn.**

$$\text{Bovenstaand gevonden: } x1 = h1 * \frac{\sin(P)}{\sin(b) * \tan(d) + \cos(b) * \cos(P)} \text{ en}$$

$$y1 = h2 * \frac{\sin(b) * \cos(P) - \cos(b) * \tan(d)}{\sin(b) * \tan(d) + \cos(b) * \cos(P)}$$

Door $\tan(d)$ te elimineren kan de relatie tussen x1 en y1 geschreven worden als functie van b en P.

$$\sin(b) * \tan(d) + \cos(b) * \cos(P) = \frac{h1 * \sin(P)}{x1}$$

ZONNEWIJZERS

$$\sin(b) * \tan(d) = \frac{h_1 * \sin(P)}{x_1} - \cos(b) * \cos(P)$$

$$\sin(b) * \tan(d) = \frac{h_1 * \sin(P) - x_1 * \cos(b) * \cos(P)}{x_1}$$

$$\tan(d) = \frac{h_1 * \sin(P) - x_1 * \cos(b) * \cos(P)}{x_1 * \sin(b)}$$

$$y_1 = h_2 * \frac{\sin(b) * \cos(P) - \cos(b) * \left(\frac{h_1 * \sin(P) - x_1 * \cos(b) * \cos(P)}{x_1 * \sin(b)} \right)}{\sin(b) * \frac{h_1 * \sin(P) - x_1 * \cos(b) * \cos(P)}{x_1 * \sin(b)} + \cos(b) * \cos(P)}$$

$$y_1 = h_2 * \frac{x_1 * (\sin(b))^2 * \cos(P) - \cos(b) * h_1 * \sin(P) + x_1 * (\cos(b))^2 * \cos(P)}{x_1 * \sin(b) * \frac{h_1 * \sin(P) - x_1 * \cos(b) * \cos(P)}{x_1 * \sin(b)} + x_1 * \cos(b) * \cos(P)}$$

$$y_1 = h_2 * \frac{x_1 * \cos(P) * ((\sin(b))^2 + (\cos(b))^2) - h_1 * \cos(b) * \sin(P)}{x_1 * \sin(b) * \frac{h_1 * \sin(P) - x_1 * \cos(b) * \cos(P)}{x_1 * \sin(b)}}$$

$$y_1 = h_2 * \frac{x_1 * \cos(P) - h_1 * \cos(b) * \sin(P)}{h_1 * \sin(b) * \sin(P)}$$

$$y_1 = \frac{h_2 * x_1 * \cos(P)}{h_1 * \sin(b) * \sin(P)} - \frac{h_1 * h_2 * \cos(b) * \sin(P)}{h_1 * \sin(b) * \sin(P)}$$

$$y_1 = \frac{h_2}{h_1 * \sin(b) * \tan(P)} * x_1 - \frac{h_2}{\tan(b)}$$

Dit is de vergelijking van een lijn met richtingscoëfficiënt: $\frac{h_2}{h_1 * \sin(b) * \tan(P)}$

en snijpunt met de y-as: $-\frac{h_2}{\tan(b)}$

Bij variabele uurhoek P verandert alleen de richtingscoëfficiënt zodat de lijnen elkaar snijden in het punt C met $x_c = 0$, $y_c = -\frac{h_2}{\tan(b)}$

Duidelijk is dat met $h_2 = h_1 * \sin(b)$ de formule van de uurlijnen verandert in

$$y_1 = \frac{h_1 * \sin(b)}{h_1 * \sin(b) * \tan(P)} * x_1 - \frac{h_1 * \sin(b)}{\tan(b)} \quad \text{of} \quad y_1 = \frac{1}{\tan(P)} * x_1 - h_1 * \cos(b)$$

D.w.z. dat de **uurlijnen** (om het uur, dus om de 15°) onderling ook **hoeken van 15°** maken en dat het snijpunt C van de uurlijnen dan gegeven wordt door $x_c = 0$ en $y_c = -h_1 * \cos(b)$ (Zie de 3D figuur op blz. 2). Omdat de hoogte van de Oost-West draad $h_1 * \sin(b)$ is, zal het duidelijk zijn dat deze vorm van de tweedraads zonnwijzer geen zin heeft op lage geografische breedtes (hoogte draad naar nul), maar ook niet op erg hoge breedtes

ZONNEWIJZERS

omdat dan de draden (bijna) dezelfde hoogte hebben en er dus net zo goed met een gnomon gewerkt kan worden.

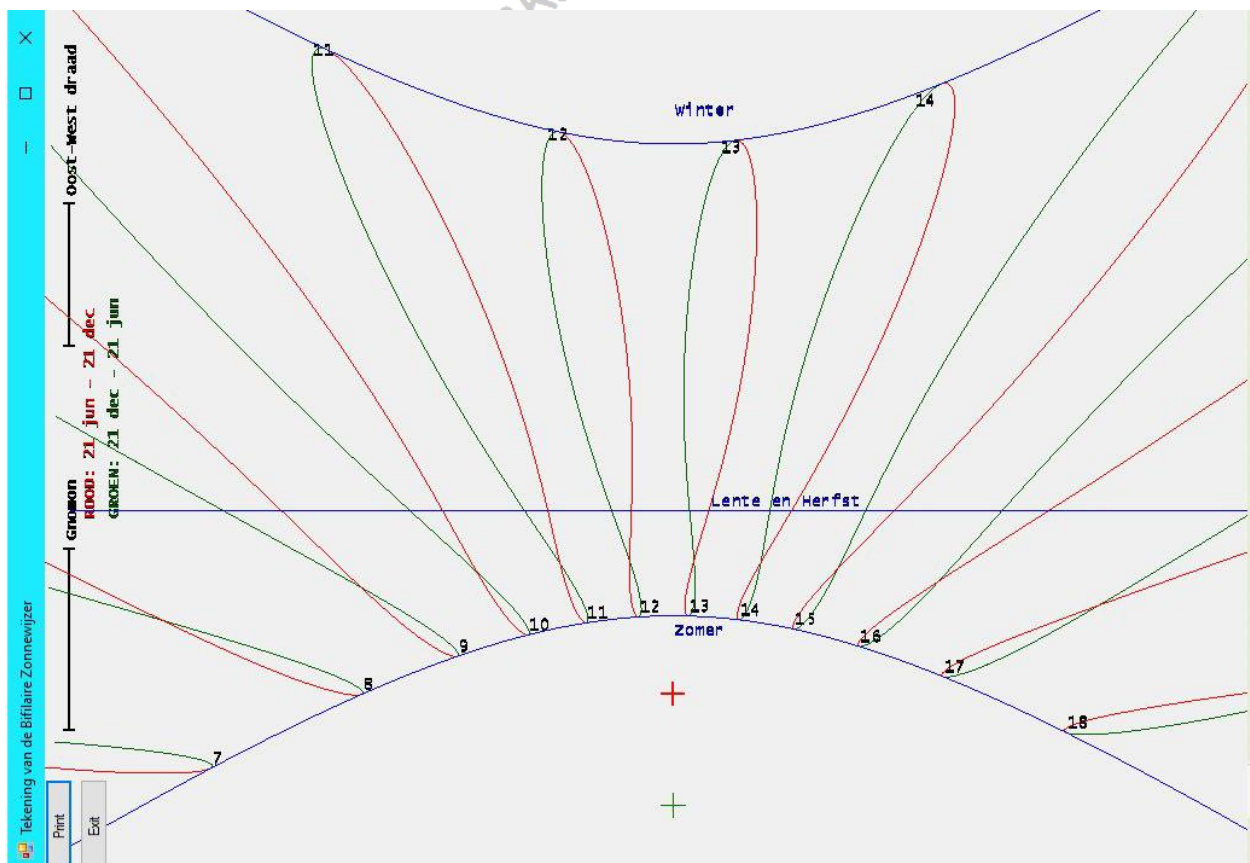
Een tekening van de uur- en datumlijnen van de bifilaire zonnwijzer kan gemaakt worden met het Zonnwijzer Programma.

In het programma kunnen diverse keuzes gemaakt worden.

Onderstaande tekening is gemaakt voor 52° Noorderbreedte en 5° Oosterlengte en voor het bijzondere geval dat $h_2 = h_1 \cdot \sin(\text{breedte})$ zodat de uurlijnen om de 15° vallen. Ook is rekening gehouden met het lengteverschil (15° OL, wintertijd) en de tijdvereffening.

De noord-zuid en de oost-west lijnen moeten door het rode kruis getekend worden.

Links in de tekening staan de hoogtes van de twee draden aangegeven. De afstand van het rode (snijpunt draadvlakken) naar het groene (snijpunt C) kruis is $h_1 \cdot \cos(\text{breedte})$.



De bifilaire zonnwijzer als het zonnwijzervlak niet horizontaal is.

De bifilaire zonnwijzer wordt nu gemaakt alsof het een gewone vlakke zonnwijzer is. De zonnwijzerconstanten kunnen berekend worden met de formules die gevonden zijn in Hoofdstuk 3 en daar op bladzijde 5 samengevat zijn:

Stijlverheffing v: $\sin(v) = \cos(i) \cdot \sin(b) - \sin(i) \cdot \cos(d) \cdot \cos(b)$

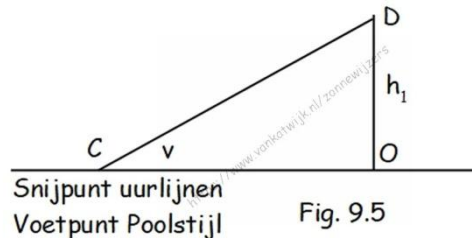
Hoek k tussen de loodlijn en de substijl: $\tan(k) = \sin(d) / (\cos(i) \cdot \cos(d) + \sin(i) \cdot \tan(b))$

Uurhoek van de substijl: $\tan(P_{ss}) = (\sin(i) \cdot \sin(d)) / (\sin(b) \cdot \cos(d) \cdot \sin(i) + \cos(i) \cdot \cos(b))$

ZONNEWIJZERS

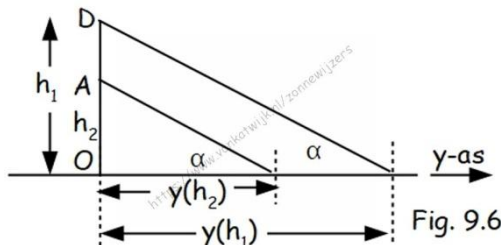
Ook kunnen de zonnwijzerconstanten gevonden worden met het zonnwijzer programma.

Als de zonnwijzer verplaatst wordt naar een plaats met geografische breedte v en met een lengteverschil P_{SS} met de oorspronkelijke plaats, dan is dit een horizontale zonnwijzer (zie Hoofdstuk 3, bladzijde 4: Verplaatsing naar een horizontale zonnwijzer). In figuur 9.5 is v de in bovenstaande gevonden stijlverheffing en h_1 de



hoogte van de Noord-Zuid draad van de bifilaire zonnwijzer. In de figuur is te zien dat $\tan(v) = h_1/CO$. OD is een imaginaire gnomon die loodrecht op het zonnwijzervlak wordt opgericht op de afstand $CO = h_1/\tan(v)$. In feite is deze vlakke zonnwijzer nu een bifilaire

zonnwijzer met twee even hoge draden (nog niet zinvol dus). De Oost-West draad



wordt nu verlaagd naar een hoogte h_2 . De schaduw van de Noord-Zuid draad zal hierdoor niet veranderen. De verhouding tussen h_2 en h_1 is $f_2 = h_2/h_1$.

De schaduw van de Oost-West draad verandert met deze factor f_2 . $\tan(\alpha) = h_1/y(h_1)$, maar ook

geldt $\tan(\alpha) = h_2/y(h_2)$ zodat $y(h_2) = (h_2/h_1) \cdot y(h_1)$. Of $y(h_2) = f_2 \cdot y(h_1)$.

Het patroon van de lijnen op de zonnwijzer wordt hierdoor in de y -richting ingedrukt.

De bifilaire zonnwijzer kan dus ook getekend worden met de Uniforme Methode van Hoofdstuk 7:

- Voer de gegevens breedte, lokale en standaard lengte, draaiing (declinatie), inclinatie, de hoogte van de (oorspronkelijke) Noord-Zuid draad (de y -as) en de verhouding in de hoogtes van de twee draden in.

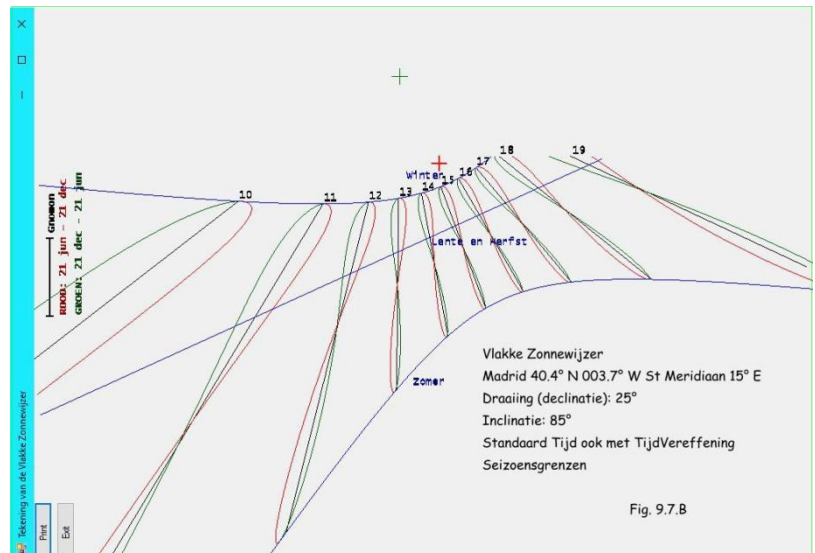
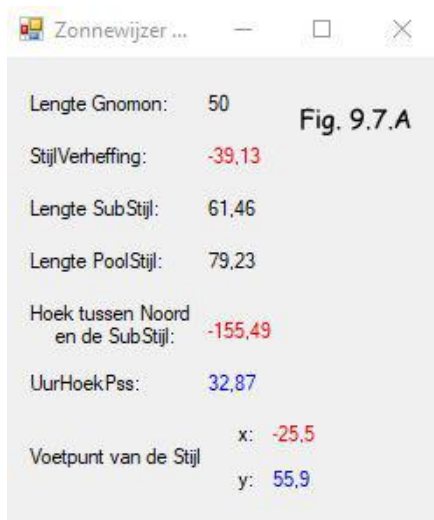
- Bereken eerst de stijlverheffing v en de uurhoek van de substijl P_{SS} .

- Roep de Hoofd Procedure aan met geografische breedte = v en lengte van de Standaard Meridiaan = P_{SS} . Het is nu een horizontale zonnwijzer.

- Verklein de gevonden waarden in de y -richting met de factor $f_2 = h_2/h_1$.

Merk dus nogmaals op dat als $f_2 = 1$, dit is zo in Figuur 9.7.C het een "gewone" vlakke, horizontale zonnwijzer is met hetzelfde lijnenpatroon als de oorspronkelijke gedraaide en gekantelde zonnwijzer.

ZONNEWIJZERS



Figuren 9.7 zijn afdrucken voor Madrid: 40.4° N, 3.7° W gemaakt met het zonnewijzerprogramma.

