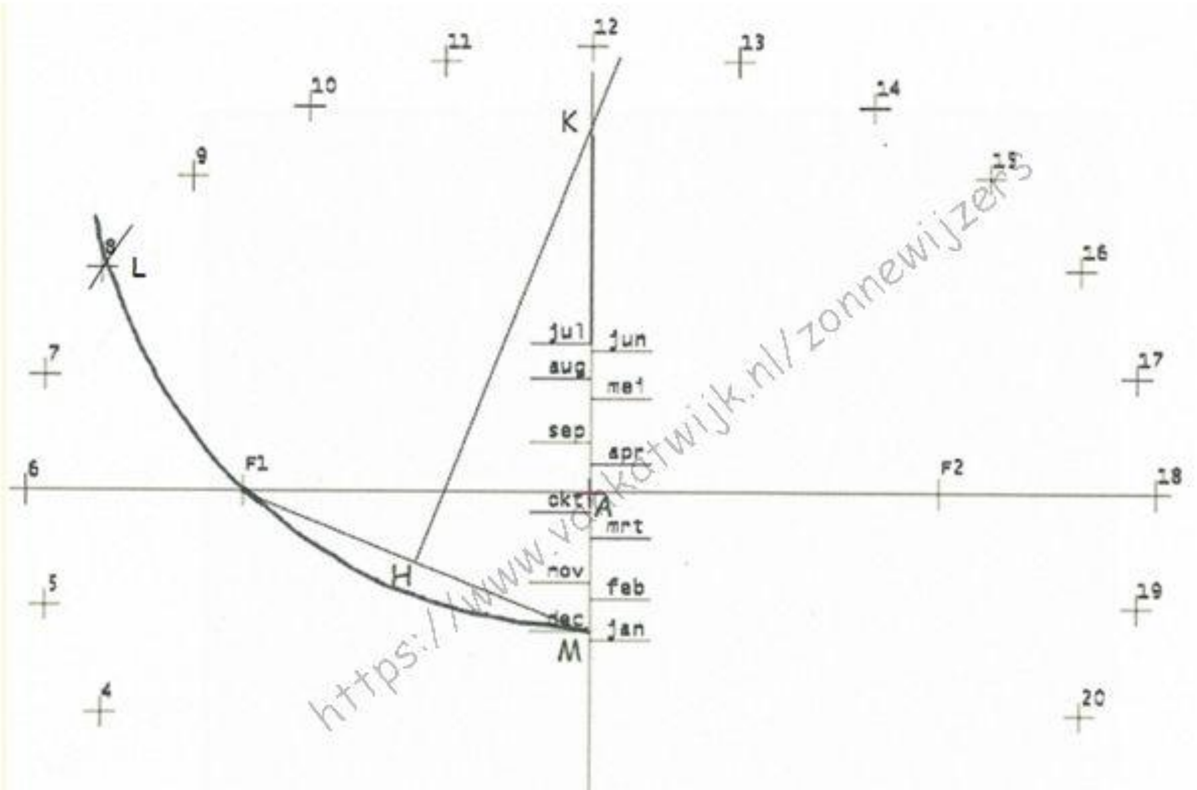
ZONNEWIJZERS

Hoofdstuk 13 De cirkel van Lambert

Inhoud:

Inleiding

Met de Cirkel van Lambert kan bij de Analemmatische Zonnewijzer de tijd van zonsopkomst (en –ondergang) geconstrueerd worden.



Constructie van de cirkel

-Teken de lijn FM

- Het midden van FM is punt H

-Teken door H de middenloodlijn van lijnstuk FM

-Deze lijn snijdt de korte as van de ellips in K

-Teken een cirkel met straal KM (of KF)

-Het snijpunt van deze cirkel met de ellips, punt L, geeft het tijdstip van zonsopkomst en zonsondergang.

ZONNEWIJZERS

Een vraag

In onderstaande wordt de juistheid hiervan aangetoond. Wel blijft de vraag WAAROM deze cirkel deze tijden aangeeft. Volgt dit uit de projectie waarmee de analemmatische zonnewijzer wordt gemaakt? Graag ontvang ik de gouden tip. Het is bijvoorbeeld wel logisch dat de cirkel op 21 maart en 23 september overgaat in een rechte lijn van 6 naar 18 uur.

Gebruikte formules uit de hoofdstukken 1 en 12

Bij gegeven lange as = l en geografische breedte = b is bij elke uurhoek = P een punt op de ellips te bepalen: $x = l*\sin(P)$ en $y = l*\sin(b)*\cos(P)$

Voor het brandpunt (F) geldt: $FA = l*\cos(b)$

Hoek vanuit F naar lijnstuk A-Persoon Hoek (AFM) = declinatie

Voor een persoon (M) op een bepaalde datum geldt: $AM = Y_M = l*\tan(d)*\cos(b)$

De uurhoek bij opkomst volgt uit (zie Hoofdstuk 1): $\cos(P_{opk}) = -\tan(b)\tan(d)$

Berekening van de straal en het middelpunt

Om de **straal van de cirkel** te berekenen wordt eerst de lengte van FP berekend.

$$\cos(AFM) = \cos(d) = \left|\frac{FA}{FM}\right| \rightarrow FM = \left|\frac{FA}{\cos(d)}\right| = \left|\frac{l*\cos(b)}{\cos(d)}\right|$$

$$MH = \left|\frac{FM}{2}\right| = \left|\frac{l*\cos(b)}{2*\cos(d)}\right|$$

$$|\sin(HKM)| = |\sin(d)| = \left|\frac{MH}{KM}\right| = \left|\frac{MH}{R}\right| \text{ zodat}$$

$$\mathbf{R} = |KM| = \left|\frac{MH}{\sin(d)}\right| = \left|\frac{l*\cos(b)}{2*\sin(d)*\cos(d)}\right| = \left|\frac{\mathbf{l*\cos(b)}}{\mathbf{\sin(2*d)}}\right| \text{ of } \mathbf{R} = \left|\frac{\mathbf{FA}}{\mathbf{\sin(2*d)}}\right|$$

$$y_K = AK = KM - AM = \frac{l*\cos(b)}{\sin(2*d)} - l*\tan(d)*\cos(b) = \frac{l*\cos(b)}{2*\sin(d)*\cos(d)} - \frac{l*\sin(d)*\cos(b)}{\cos(d)}$$

$$= \frac{l*\cos(b) - l*\sin(d)*\cos(b)*2*\sin(d)}{2*\sin(d)*\cos(d)} = \frac{l*\cos(b)}{\sin(2*d)} * (1 - 2*\sin^2(d)) = \frac{l*\cos(b)}{\sin(2*d)} * \cos(2*d) =$$

$$= \frac{l*\cos(b)}{\tan(2*d)} \text{ met l en b positief en } d < 0 \text{ is } y_K > 0 \text{ zodat: } \mathbf{y_K} = -\frac{\mathbf{l*\cos(b)}}{\mathbf{\tan(2*d)}}$$

Bewijs dat het punt van opkomst ook op de cirkel van Lambert ligt

Als punt (x_P,y_P) bij opkomst op de cirkel van Lambert ligt, dan moet dit punt voldoen aan de vergelijking van de cirkel $x_P^2 + (y_P - y_K)^2 = R^2$, of

$$l^2*\sin^2(P_{opk}) + \left(l*\sin(b)*\cos(P_{opk}) - \left(-\frac{l*\cos(b)}{\tan(2*d)}\right)\right)^2 = \left(\frac{l*\cos(b)}{\sin(2*d)}\right)^2$$

De uurhoek bij opkomst wordt bepaald door $\cos(P_{opk}) = -\tan(b)*\tan(d)$ (zie Hoofdstuk 1)

ZONNEWIJZERS

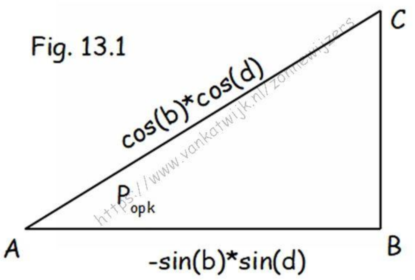


Fig. 13.1

$BC^2 = AC^2 - AB^2 = \cos^2(b)*\cos^2(d) - \sin^2(b)*\sin^2(d)$

zodat: $\sin^2(P_{opk}) = \dfrac{\cos^2(b)*\cos^2(d) - \sin^2(d)*\sin^2(b)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)}$

Als de formule voor $\sin^2(P_{opk})$ herleid uit de vergelijking van de cirkel hier gelijk aan is, dan ligt het punt van opkomst inderdaad op de cirkel van Lambert.

In het volgende is $P = P_{opk}$

$$\cancel{l^2}*\sin^2(P) + \cancel{l^2}*\sin^2(b)*\cos^2(P) + \frac{2*\cancel{l}*\sin(b)*\cos(P)*\cancel{l}*\cos(b)}{\tan(2*d)} + \frac{l^2\cos^2(b)}{\tan^2(2*d)} = \frac{l^2\cos^2(b)}{\sin^2(2*d)}$$

$$\sin^2(P) + \sin^2(b)*\cos^2(P) + \frac{2*\sin(b)*(-\tan(b)*\tan(d))*\cos(b)}{\tan(2*d)} + \frac{\cos^2(b)*\cos^2(2*d)}{\sin^2(2*d)} - \frac{\cos^2(b)}{\sin^2(2*d)} = 0$$

$$\sin^2(P) + \sin^2(b)*\cos^2(P) - \frac{2*\cos(2*d)*\sin(b)*\sin(b)*\sin(d)*\cos(b)}{\sin(2*d)*\cos(b)*\cos(d)} + \frac{\cos^2(b)}{\sin^2(2*d)}*(\cos^2(2*d)-1) = 0$$

$$\sin^2(P) + \sin^2(b)*\cos^2(P) - \frac{2*\cos(2*d)*\sin^2(b)*\sin(d)*\cos(b)}{2*\sin(d)*\cos(d)*\cos(b)*\cos(d)} + \frac{\cos^2(b)*(-\sin^2(2*d))}{\sin^2(2*d)} = 0$$

$$\sin^2(P) + \sin^2(b)*(-\tan(b)\tan(d))^2 - \frac{\cos(2*d)*\sin^2(b)}{\cos(d)*\cos(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) + \sin^2(b)*\frac{\sin^2(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \frac{(\cos^2(d)-\sin^2(d))*\sin^2(b)}{\cos^2(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) + \frac{\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \frac{\cos^2(d)*\sin^2(b)-\sin^2(d)\sin^2(b)}{\cos^2(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) + \frac{\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \frac{\cos^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)-\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) - \frac{\cos^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)-\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b) - \sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) - \frac{\cos^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} + \frac{\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)+\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) - \sin^2(b) + \frac{\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)+\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} - \cos^2(b) = 0$$

$$\sin^2(P) = \sin^2(b) - \frac{\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)+\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)} + \cos^2(b)$$

$$\sin^2(P) = 1 - \frac{\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)+\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)}$$

$$\sin^2(P) = \frac{\cos^2(b)*\cos^2(d)-\sin^2(d)*\sin^2(b)*\cos^2(b)-\sin^4(b)*\sin^2(d)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)}$$

$\sin^2(P) = \dfrac{\cos^2(b)*\cos^2(d) - \sin^2(d)*\sin^2(b)*(\cos^2(b) + \sin^2(b))}{\cos^2(b)*\cos^2(d)}$

$\sin^2(P) = \dfrac{\cos^2(b)*\cos^2(d) - \sin^2(d)*\sin^2(b)}{\cos^2(b)*\cos^2(d)}$

Dit is inderdaad gelijk aan de formule die gevonden is bij figuur 13.1 op bladzijde 2.