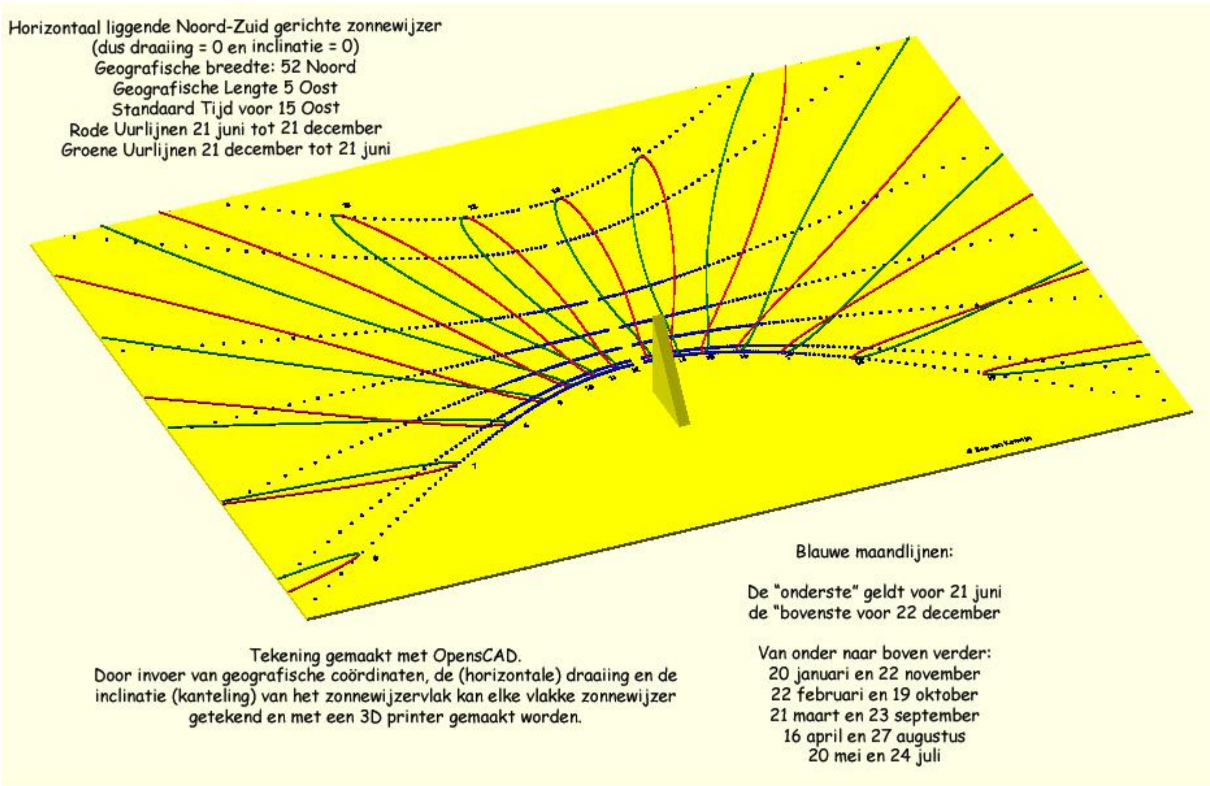
Voor afleidingen van formules voor diverse andere zonnewijzers zie: http://www.vankatwijk.nl/zonnewijzers

Op internet vond ik onderstaand pdf bestand:
https://www.zonnewijzerkring.nl/wp-content/uploads/fdv-vlakke-zws-berekenen.pdf
van dhr. Fer J. de Vries die helaas overleden is. Graag had ik met hem contact gehad. Kennelijk is er een tijd geweest waarin (bestuurs-)leden van de Zonnewijzerkring wel geïnteresseerd waren in de achtergronden en bijbehorende formules van zonnewijzers.

De in het pdf-bestand gegeven methode is eenvoudig en briljant. In onderstaande staat een uitleg van de gebruikte formules in de Hoofd Procedure (blz. 5 van het betreffende bestand). Het principe is gebaseerd op assen rotaties in R3.



Bovenstaand een voorbeeld van een horizontale, vlakke, Noord-Zuid gerichte zonnewijzer als 3D print gebaseerd op de hieronder afgeleide formules.

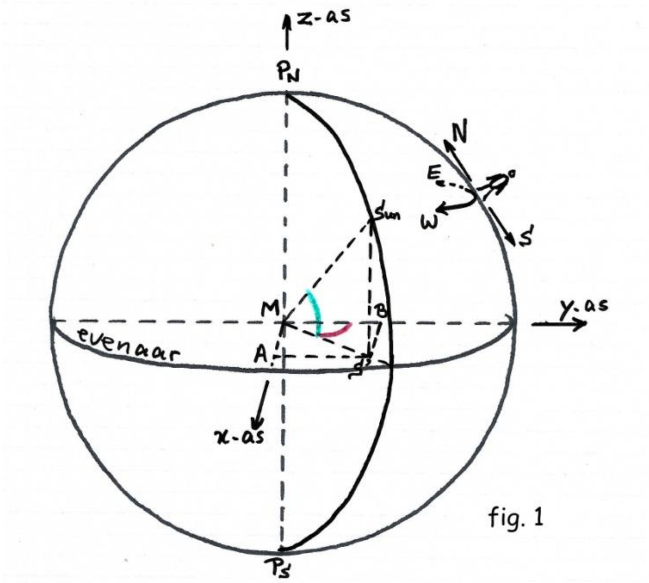


fig. 1

Bol met straal = 1
De rode boog is de uurhoek van de zon = t
De groene boog is de declinatie van de zon = decl
Het poppetje is de plaats van de zonnewijzer / waarnemer met de windrichtingen

Kies een rechtsdraaiend assenstelsel x,y,z met de y-as als de snijlijn van het equatorvlak met het meridiaanvlak van de waarnemer en de z-as samenvallend met de aardas.
S' is de projectie van de zon op het equatorvlak.
MS' = cos(decl)
X_0 = MA = BS' = MS' * sin(t)

$$\boxed{X_0 = \sin(t) * \cos(decl)}$$

Y_0 = AS' = MB = MS' * cos(t)

$$\boxed{Y_0 = \cos(t) * \cos(decl)}$$

Z_0 = Sun-S'

$$\boxed{Z_0 = \sin(decl)}$$

Algemene formules voor assenrotaties in R3 (in de richting van de as met de klok mee):

$$R_x(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \qquad R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & -\sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Het oorspronkelijke assenstelsel wordt geroteerd om de x-as over een hoek (90 - phi)
(kijkend in de richting van de x-as tegen de klok, dus in de algemene rotatie matrices een rotatie om de x-as over een hoek –(90 – phi)
(phi is de geografische breedte van de zonnewijzer / waarnemer)

Bij rotatie om de x-as verandert de waarde van x niet, dus $x_1 = x_0$; dit volgt natuurlijk ook uit de rotatie formules.

In figuur 2 is te zien dat door de rotatie ((90- phi) linksom) om de x-as de coördinaten gevonden worden t.o.v. het horizontale vlak van de waarnemer. De x-as en de x'-as vallen samen met de richting west.

De rode boog in onderstaande is H, de hoogte van de zon boven de horizon.
Merk op dat Sun – S" = Z_1 = sin(H);

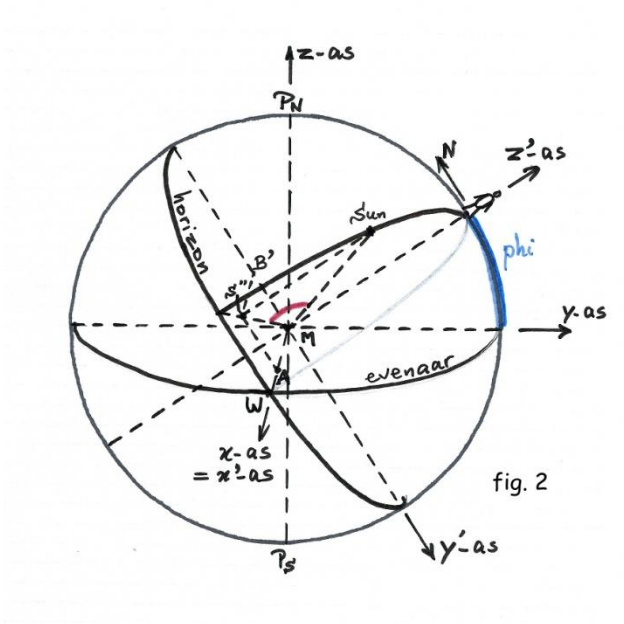


fig. 2

In onderstaande is R = 90 - phi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-R) & \sin(-R) \\ 0 & -\sin(-R) & \cos(-R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(R) & -\sin(R) \\ 0 & \sin(R) & \cos(R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

zodat:

$x_1 = x_0$
$y_1 = y_0 \cos(R) - z_0 \sin(R)$
$z_1 = y_0 \sin(R) + z_0 \cos(R)$

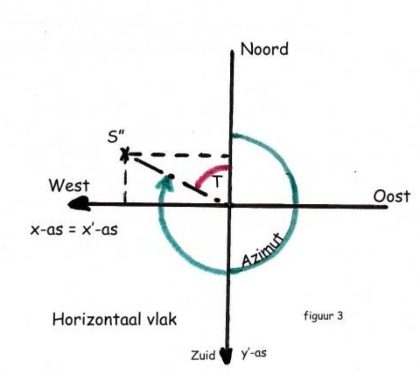
<u>Formule voor de Hoogte H:</u>

Sin(H) = Z_1 = Y_0 * sin(R) + Z_0 * cos(R) =
= cos(t)*cos(decl)*sin(90-phi) + sin(decl)*cos(90-phi) =
= cos(t)*cos(decl)*cos(phi) + sin(decl)*sin(phi);

Vergelijk dit met de formule in "BIJLAGE bolgonio en astro"

$\boxed{\textbf{sin(H) = sin(b)sin(d) + cos(b)cos(d)Cos(P)}}$ met b = phi, d = decl en P = t;

Formule voor het Azimut:



$$\mathrm{Tan}(T) = \frac{x_1}{-y_1} = \frac{\sin(t)\cos(decl)}{-\sin(phi)\cos(decl)\cos(t) + \cos(phi)\sin(decl)}$$

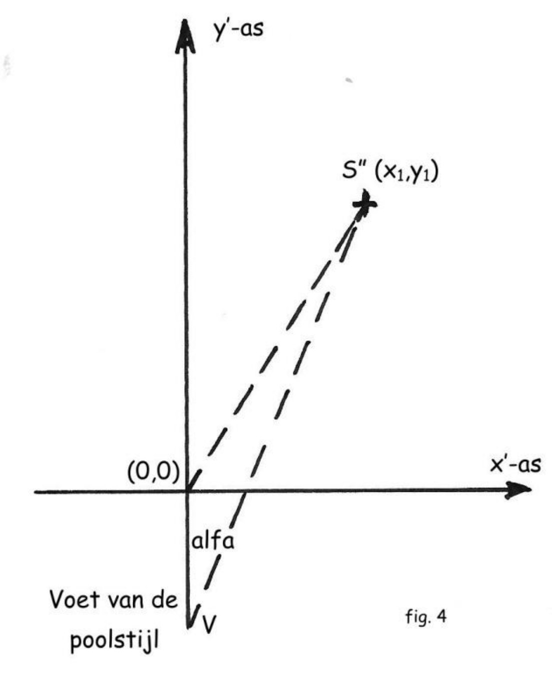
$$\mathrm{Cotan}(T) = \frac{\cos(phi)\sin(decl) - \sin(phi)\cos(decl)\cos(t)}{\sin(t)\cos(decl)}$$

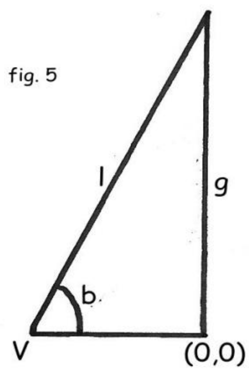
$$\mathrm{Cotan}(T)\sin(t) = \cos(phi)\tan(decl) - \sin(phi)\cos(t)$$

Vergelijk de laatste formule met de formule in "BIJLAGE bolgonio en astro"

$\boxed{\text{cotan(T)sin(P) = tan(d)cos(b) – sin(b)cos(P)}}$ met b = phi, d = decl en P = t;

Hoek alfa bij de horizontale zonnewijzer met poolstijl





b = phi = breedte waarnemer
l = lengte van de poolstijl
g = lengte van de gnomon

sin(b) = g/l waarmee:

g = l*sin(b)

De figuren 4 en 5 zijn afbeeldingen in het horizontale vlak van de waarnemer.
M (0,0) is het voetpunt van de verticale gnomon.

Op blz. 3 gevonden:

$X_1 = X_0$
$Y_1 = Y_0 * \cos(R) - Z_0 * \sin(R)$
$Z_1 = Y_0 * \sin(R) + Z_0 * \cos(R)$

Hierin is R = 90 - phi

Op blz. 2 gevonden:

$X_0 = \sin(t) * \cos(decl)$
$Y_0 = \cos(t) * \cos(decl)$
$Z_0 = \sin(decl)$

Hiermee:

$X_1 = \sin(t)*\cos(decl)$
$Y_1 = \cos(t)*\cos(decl)*\cos(90\text{-}phi) - \sin(decl)*\sin(90\text{-}phi)$
$Z_1 = \cos(t)*\cos(decl)*\sin(90\text{-}phi) + \sin(decl)*\cos(90\text{-}phi)$

Tan(alfa) = X_1 / (Y_1 + (genormeerde)VM)
Omdat de afstand VM = l*cos(phi) niet genormeerd is moet VM gedeeld worden door g/Z_1.

Tan(alfa) = $X_1 / (Y_1 + (l*\cos(phi) / (g/Z_1))) = X_1 / (Y_1 + (l*\cos(phi) / (l*\sin(phi)/Z_1))) =$

$= X_1 / (Y_1 + Z_1*\cos(phi) / \sin(phi)) =$

$$\frac{\sin(t)*\cos(decl)}{\cos(t)*\cos(decl)*\sin(phi) - \sin(decl)*\cos(phi) + \dfrac{(\cos(t)*\cos(decl)*\cos(phi) + \sin(decl)*\sin(phi))*\cos(phi)}{\sin(phi}}$$

$$\frac{\sin(t)*\cos(decl)*\sin(phi)}{\cos(t)*\cos(decl)*\sin^2(phi) - \cancel{\sin(decl)*\cos(phi)*\sin(phi)} + (\cos(t)*\cos(decl)*\cos^2(phi) + \cancel{\sin(decl)*\sin(phi))*\cos(phi)}}$$

$$\frac{\sin(t)*\cancel{\cos(decl)}*\sin(phi)}{\cos(t)*\cancel{\cos(decl)} * (\sin^2(phi) + \cos^2(phi))}$$

= sin(phi) * tan(t)

Vergelijk dit met de formule in "Horizontale zonnewijzer met poolstijl"

$\boxed{\textbf{Tan(alfa) = sin(b)tan(P)}}$ met b = phi en P = t;

(Formule gecorrigeerd 4 nov 2018: er stond sin(b) sin(P))

Vervolg van blz. 3 waar de coördinaten X_1 , Y_1, en Z_1 van schaduwpunt S" in het horizontale vlak zijn gevonden.

Om een **willekeurige stand van het zonnewijzervlak** te krijgen wordt het zonnewijzervlak eerst over een hoek d geroteerd om de z″-as (=z′-as) en daarna over een hoek i om de x″-as.

d is de declinatie van het vlak; dit is het azimut van de gnomon: zuid = 0°, positief naar west, negatief naar oost. -180° <= d <= 180°.
De rotatie d om de z″-as in figuur 6 is dus positief, echter tegen de draairichting waarop de algemene formules op blz. 1 gebaseerd zijn.

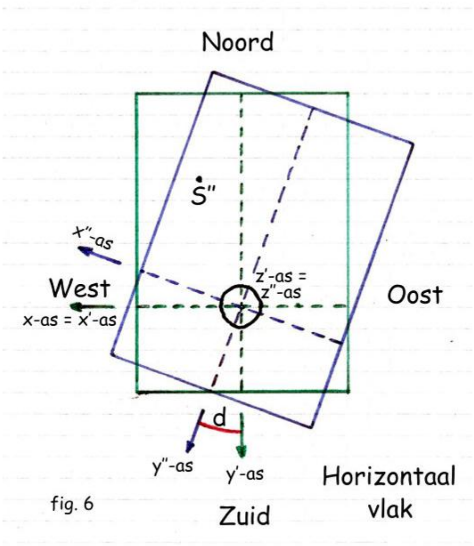


fig. 6

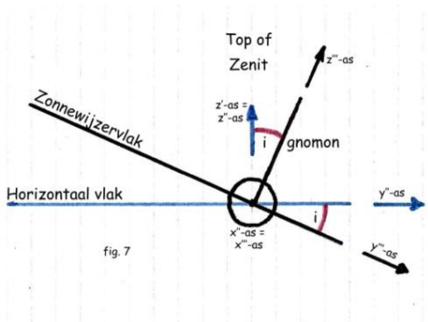


fig. 7

i is de inclinatie van het vlak; dit is de zenit afstand van het eindpunt van de gnomon.
0° <= i < 180°. (horizontaal i = 0, verticaal i = 90).
De rotatie i om de x″-as in figuur 7 is dus positief, echter tegen de draairichting waarop de algemene formules op blz. 1 gebaseerd zijn.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-d) & \sin(-d) & 0 \\ -\sin(-d) & \cos(d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-i) & \sin(-i) \\ 0 & -\sin(-i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(d) & -\sin(d) & 0 \\ \sin(d) & \cos(d) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i) & -\sin(i) \\ 0 & \sin(i) & \cos(i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_1 \cos(d) - y_1 \sin(d) \qquad x_3 = x_2$$
$$y_2 = x_1 \sin(d) + y_1 \cos(d) \qquad y_3 = y_2 \cos(i) - z_2 \sin(i)$$
$$z_2 = z_1 \qquad z_3 = y_2 \sin(i) + z_2 \cos(i)$$

(x_3,y_3,z_3) zijn de coördinaten van de zon in dit (zonne-wijzer) assenstelsel.

Z_3 is de theoretische lengte van de gnomon. Als **g** de lengte van de gnomon haaks op het zonnewijzervlak is (het eindpunt van de gnomon is het schaduwgevend punt met g > 0), dan worden de coördinaten x en y op het zonnewijzervlak gegeven door:

$\boxed{x = x_3 * g/z_3}$ en $\boxed{y = y_3 * g/z_3}$

Voorbeeld van een vlakke zonnewijzer aan een verticale muur die 30 graden gedraaid is naar het Westen (t.o.v. Zuid). De schaduwgevende driehoek staat loodrecht op het zonnewijzervlak, het donkere gedeelte van de driehoek is de Gnomon, het bovenliggende lichtste deel is de Stijl.