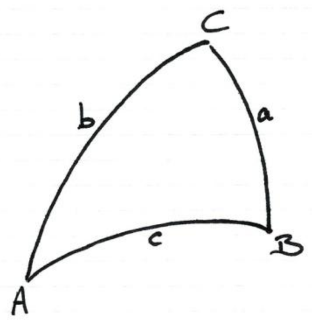
Deze bijlage hoort bij "afleidingen van formules voor diverse zonnewijzers", zie:
http://www.vankatwijk.nl/zonnewijzers

A. Een paar regels uit de bolgoniometrie

Een **grootcirkel** is een cirkel op een boloppervlak waarvan de straal gelijk is aan de straal van de bol. Dit betekent ook dat het middelpunt van alle grootcirkels en van de bol samenvallen.
Een andere definitie: Een grootcirkel is de doorsnede van een bol met een vlak door het middelpunt van die bol.

Drie elkaar snijdende grootcirkels vormen een **boldriehoek**.
Elke hoek van een boldriehoek is groter dan 0^o en kleiner dan 180^o.
De som van de drie hoeken van een boldriehoek is groter dan 180^o en kleiner dan 540^o.
De zijden van een boldriehoek zijn uit te drukken in de bijbehorende middelpuntshoek en dus ook in een hoekeenheid zoals graden.



In boldriehoek ABC gelden de volgende regels:
1^e cosinusregel: cos(a)=cos(b)*cos(c)+sin(b)*sin(c)*cos(A)
2^e cosinusregel: cos(A)= -cos(B)*cos(C)+sin(B)*sin(C)*cos(a)

Door cyclisch verwisselen zijn de formules voor cos(b), cos(c), cos(B) en cos(C) te vinden.

sinusregel: $\frac{\sin(A)}{\sin(a)} = \frac{\sin(B)}{\sin(b)} = \frac{\sin(C)}{\sin(c)}$

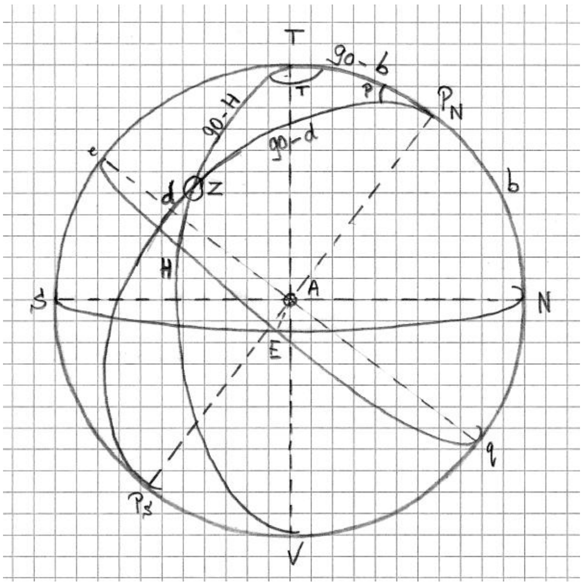
Bij de **cotangensregel** gaat men uit van vier opvolgende elementen, te beginnen met een zijde:
cotan(a)*sinus(b)=cos(b)*cos(C)+sin(C)*cotan(A) of in woorden:
cotan(ene zijde)*sin(andere zijde)=cos(andere zijde)*cos(ingesloten hoek)+sin(ingesloten hoek)*cotan(overstaande hoek)
Een **rechthoekige boldriehoek** is een boldriehoek waarvan tenminste één hoek 90^o is.
Hierin geldt de **regel van Neper**:
Als je van een rechthoekige boldriehoek de rechte hoek niet meetelt en van de beide rechthoekszijden het complement (90^o - …) neemt, dan is de cosinus van een element gelijk aan het produkt van
-de cotangenten van de beide aanliggende elementen
-de sinussen van de beide overstaande elementen.
Stel dat in bovenstaande driehoek hoek B=90^o, dan is (o.a.):
sin(a)=cotan(C)*tan(c), maar ook sin(a)=sin(b)*sin(A).
a en c zijn rechthoekszijden, daarom cos(90^o-a)=sin(a) en cotan(90^o-c)=tan(c).

De **analogieën van Neper** kunnen o.a. gebruikt worden om de parallactische hoek (S) of b.v. de breedte "terug" te berekenen als Uurhoek (P), hoogte (H), declinatie (d) en azimut (T) gegeven zijn.

$$\frac{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \qquad \frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cot\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

$$\frac{\tan\frac{a+b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{\tan\frac{a-b}{2}}{\tan\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

B. Enkele Toepassingen in de astronomische navigatie



In de tekening van de hemelsfeer is:
A = aarde
b = breedte van de waarnemer
d = declinatie van het hemellichaam (Z)
H = hoogte van het hemellichaam boven de horizon
Pn en Ps = resp. pool noord en pool zuid
hoek TPnZ = Oostelijke uurhoek = -P
N en S zijn noord- en zuidpunt op de horizon
E = oostpunt op de horizon
T = toppunt (zenith) van de waarnemer
hoek PnTZ = azimut of Ware Peiling
eq = equator

In driehoek PnTZ de 1[e] cosinusregel toepassen:

cos(90 – H) = cos(90 – b) cos(90 – d) + sin(90 – b) sin(90 – d) cos(-P)

$\boxed{\sin(H) = \sin(b)\sin(d) + \cos(b)\cos(d)\cos(P)}$

Zie ook de afleiding van deze formule op **blz. 2** in tekst **van**:

"Een algemene methode voor de berekening van het schaduwpunt bij vlakke zonnewijzers"

Op de ware middag is P=0 zodat dan $\boxed{\sin(H) = \sin(b)\sin(d) + \cos(b)\cos(d) = \cos(b-d)}$

Op de evenaar is b = 0 zodat daar $\boxed{\sin(H) = \cos(d)\cos(P)}$

Nogmaals in driehoek PnTZ de 1[e] cosinusregel toepassen:

cos(90 – d) = cos(90 – b) cos(90 – H) + sin(90 – b) sin(90 – H) cos(T)

sin(d) = sin(b) sin(H) + cos(b) cos(H) cos(T)

cos(b) cos(H) cos(T) = sin(d) – sin(b) sin(H)

$\boxed{\cos(T) = (\sin(d) - \sin(b)\sin(H)) / (\cos(b)\cos(H))}$

Dit levert een hoek T tussen o en 180 graden. Om de Ware Peiling te vinden geldt:

WP = T als 180 <= P < 360 en WP = 360 –T als 0<= P < 180

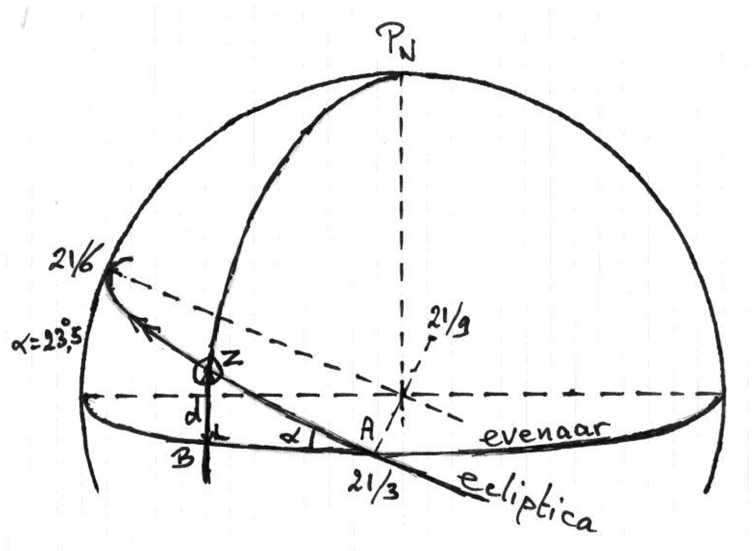
Op de evenaar is b = 0 zodat $\boxed{\cos(T) = \sin(d)/\cos(H)}$

Het azimut kan ook worden berekend met de cotangensregel:
Zie bovenstaande sfeerfiguur:
cotan(90-d)*sin(90-b)=cos(90-b)*cos(P) + sin(P)*cotan(T)
tan(d)cos(b)=sin(b)cos(P) + sin(P)cotan(T) waarmee:

cotan(T)sin(P) = tan(d)cos(b) – sin(b)cos(P)

Op de evenaar is b = 0 zodat **cotan(T)sin(P) = tan(d)**

C. Globaal berekenen van de declinatie:



De maximale declinatie is ongeveer 23,5°. De zon doorloopt in een jaar de ecliptica. Gerekend vanaf 21 mrt. heeft de zon in de tekening de baan AZ afgelegd. Stel dat dit de situatie is x dagen na 21 mrt, dan is de afgelegde boog AZ = (x/365)*360°.
In driehoek ABZ is hoek ABZ = 90°, hoek BAZ = 23,5° en boog BZ is de declinatie.
Volgens de regel van Neper uit de bolgoniometrie (zie "Bijlage bolgonio en astro") is in de rechthoekige boldriehoek ABZ:

Sin(d) = sin(23,5°)*sin(x*360/365)

Deze formule geeft een acceptabele schatting van de declinatie.

D. Van ware tijd naar zomer- en wintertijd in Nederland

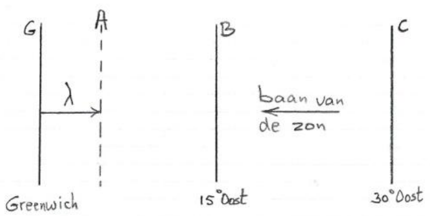
Om de afgelezen (ware) tijd op een zonnewijzer te herleiden naar de tijd op onze klokken, moet er met twee fenomenen rekening worden gehouden:

1. De tijdvereffening
2. Lengteverschil in tijd

1. De **Tijdvereffening** is het gevolg van twee oorzaken:
   1.1 de baan van de aarde om de zon is ellipsvormig en niet cirkelvormig, daarom is ook de (schijnbare) jaarbaan van de zon ellipsvormig. In januari staan zon en aarde het dichtst bij elkaar. In de eerste helft van het jaar loopt de ware zon daarom iets voor op de middelbare zon, in de tweede helft juist achter.
   1.2 de (schijnbare) baan van de zon om de aarde (ecliptica) maakt een hoek met de equator (waarlangs de tijd wordt gerekend). Zie de figuur op blz. 3.

De tijdvereffening uit onderstaande figuur moet bij de op de zonnewijzer afgelezen tijd opgeteld worden om de middelbare tijd te krijgen.

2. **Lengteverschil in tijd**



In de figuur zijn de verticale lijnen voorstellingen van meridianen. De lengte van onze positie is λ. In de winter hebben wij de tijd die hoort bij 15° oost, in de zomer de tijd die hoort bij 30° oost. In één dag, 24 uur, draait de aarde om zijn as en zien wij de zon van oost naar west om de aarde draaien. D.w.z. een rotatie van 360° in 24 uur, ofwel 15° in een uur. In de winter staat er 12.00 uur op onze klok als de zon boven meridiaan B staat. De zon moet dan nog (15° - λ) graden naar het westen voordat het bij ons 12.00 uur Ware Tijd is; daar doet de zon nog (15° - λ)/15° uur over.

De schaduw van een poolstijl valt om 12.00 uur wintertijd daarom (15° - λ) graden ten westen van de 12.00 uur Ware Tijd lijn.

Het zal duidelijk zijn dat dit (2*15° - λ) graden in de zomertijd is.

Uitgaande van de 12.00 uur lijn (kloktijd) kunnen de overige (halve) uren om de (7.5°) 15° uitgezet worden.

Als de zonnewijzer Ware (zonne-)Tijd aangeeft, dan moet je dus respectievelijk (15° - λ))/15° uur of **(2*15° - λ))/15° uur bij de zonnewijzertijd optellen om de** winter- of **zomertijd te krijgen**.

Omgekeerd kun je de uurstrepen vanaf 12.00 uur wintertijd tekenen door vanaf (uurhoek) P = -(15°-λ) steeds 15° bij P te tellen of af te trekken.